

Colle 19 • INDICATIONS

Applications linéaires

Exercice 19.1

Soit $n \geq 2$. On note $E_n := \mathbb{R}_n[X]$.

On considère :

$$\varphi : \begin{cases} E_n & \longrightarrow & E_n \\ P & \longmapsto & (X^2 - X)P(1) + (X^2 + X)P(-1). \end{cases}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de l'espace E_n .
2. Déterminer le noyau de φ .
3. Déterminer l'image de φ .

indication

1. Il faut vérifier que l'application est correctement définie, *i.e.* est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Raisonner par analyse-synthèse. Établir qu'un polynôme du noyau admet 1 et -1 comme racines, en utilisant la liberté de la famille (X, X^2) .
3. Raisonner par analyse-synthèse. Dans la phase de synthèse, pour montrer que $\text{Vect}(X, X^2) \subset \text{Im}(\varphi)$, il suffit de vérifier que $X, X^2 \in \text{Im}(\varphi)$. Pour cela, il faut exhiber deux polynômes P_1 tel que $\varphi(P_1) = X$ et P_2 tel que $\varphi(P_2) = X^2$.

Exercice 19.2

On se place dans $\mathbb{R}[X]$ et on considère :

$$\varphi : P \longmapsto P' \quad \text{et} \quad \psi : P \longmapsto XP.$$

1. Justifier que φ et ψ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$.
2. Étudier l'injectivité et la surjectivité de φ et ψ .

indication

1. Sans difficulté.
2.
 - ◆ Montrer que $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0_{\mathbb{R}[X]}\}$ (contient les polynômes constants).
 - ◆ Montrer que $\text{Im}(\psi)$ est l'ensemble des polynômes dont 0 est racine.

résultat

- ◆ φ est surjectif mais pas injectif.
- ◆ ψ est injectif mais pas surjectif.

Exercice 19.3

Soient E, F et G trois espaces vectoriels.

Soient $u \in L(E, F)$ et $v \in L(F, G)$.

Montrer que :

$$v \circ u = 0 \iff \text{Im}(u) \subset \text{Ker}(v).$$

Exercice 19.4

Soit E un espace vectoriel.

Soient N et I deux sous-espaces vectoriels de E .

On note :

$$\mathcal{A} := \left\{ f \in L(E) \mid \begin{cases} N \subset \text{Ker}(f) \\ \text{Im}(f) \subset I \end{cases} \right\}.$$

1. Montrer que \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.
2. Montrer que \mathcal{A} est stable par composition.

Exercice 19.5

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Soit $u \in L(E)$ tel que $u^3 = u$.

1. Peut-on avoir u bijectif ?
2. Montrer que :

$$E = \text{Ker}(u) \oplus \text{Ker}(u - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(u + \text{Id}_E).$$

indication

1. Tester avec $u = \text{Id}_E$.
2. Raisonner par analyse synthèse. En exprimant $x \in E$ comme $x = x_0 + x_1 + x_{-1}$ (avec $x_0 \in \text{Ker}(u)$, $x_1 \in \text{Ker}(u - \text{Id}_E)$ et $x_{-1} \in \text{Ker}(u + \text{Id}_E)$), écrire $f(x)$ puis $f^2(x)$ pour en déduire x_0, x_1 et x_{-1} en fonction de $x, f(x)$ et $f^2(x)$.

Exercice 19.6

On se place dans \mathbb{R}^3 et on considère les deux sous-espaces :

$$\mathcal{D} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathcal{D} \oplus \mathcal{P}$.
2. On note p le projecteur sur \mathcal{P} , parallèlement à \mathcal{D} .
Exprimer, pour $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, le vecteur $p(u)$.

indication

1. Commencer par écrire que $\mathcal{D} = \text{Vect} \{(1, 2, 3)\}$ et $\mathcal{P} = \text{Vect} \{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}$.
2. Par définition de p , $p(u) \in \mathcal{P}$ et $u - p(u) \in \mathcal{D}$, donc :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} : u - p(u) = \alpha(1, 2, 3).$$

On peut ensuite écrire $p(u)$ et utiliser l'équation de \mathcal{P} pour déterminer la valeur de α .

résultat

$$p(x, y, z) = \frac{1}{6}(5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z).$$

Exercice 19.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Déterminer l'ensemble des formes linéaires φ sur $M_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

indication

Le principal réflexe est de tester l'égalité sur des matrices élémentaires. Cette idée est motivée par le fait qu'une application linéaire est entièrement décrite par son action sur une base.

On montre que :

- ◆ les coefficients hors diagonale sont nuls : pour $i \neq j$, prendre $A = E_{i,i}$ et $B = E_{i,j}$;
- ◆ les valeurs diagonales sont toutes égales : pour $i \neq j$, prendre $A = E_{i,j}$ et $B = E_{j,i}$.

Ensuite, on montre que $\varphi(\cdot) = \lambda \operatorname{Tr}(\cdot)$, en décomposant $M \in M_n(\mathbb{K})$ comme $M = \sum_{i,j} m_{i,j} E_{i,j}$.

résultat

$$\{\lambda \operatorname{Tr}(\cdot) ; \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 19.8

Soit E un espace vectoriel.

Soient $p, q \in L(E)$ deux projecteurs de même image.

1. Simplifier $q \circ p$ et $p \circ q$.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $f_\lambda := \lambda p + (1 - \lambda)q$.
 - (a) Montrer que f_λ est un projecteur.
 - (b) Déterminer l'image de f_λ .

indication

1. Il s'agira de comprendre que :

$$\forall y \in \operatorname{Im}(q), \quad q(y) = y,$$

puis d'appliquer cela à $y = p(x)$.

2. (a) Montrer que $f_\lambda \circ f_\lambda = f_\lambda$, en utilisant les simplifications précédentes.
(b) En notant $F := \operatorname{Im}(p) = \operatorname{Im}(q)$, comprendre que, pour tout $y \in F$, $p(y) = q(y) = y$.

résultat

1. $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.
2. **(b)** $\text{Im}(f_\lambda) = \text{Im}(p) = \text{Im}(q)$.

Exercice 19.9

Soit E un espace vectoriel.

Soient $f, g \in L(E)$ tels que $f \circ g = \text{Id}_E$.

1. Montrer que $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$.
2. Montrer que $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)$.
3. Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(g)$.

indication

1. Raisonner par double inclusion. L'une se fait sans difficulté et sans l'hypothèse $f \circ g = \text{Id}_E$.
2. Raisonner par double inclusion. L'une se fait sans difficulté et sans l'hypothèse $f \circ g = \text{Id}_E$.
3. Raisonner par analyse-synthèse. Dans la phase d'analyse, lorsque l'on écrit $x = y + z$ ($x \in E$, $y \in \text{Ker}(f)$ et $z \in \text{Im}(g)$), appliquer f pour déterminer z .
Autre méthode. On peut montrer que $p := g \circ f$ est une projection, utiliser les résultats sur les projections et les questions précédentes.

Exercice 19.10

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in L(E)$.

1. Montrer que $(\text{Ker}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.
2. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker}(f^{k_0}) = \text{Ker}(f^{k_0+1})$. Montrer que :
$$\forall k \geq k_0, \quad \text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^{k_0}).$$
3. Donner un espace E et un endomorphisme f dont la suite $(\text{Ker}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante mais non stationnaire.

indication

1. Sans difficulté.
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \text{Ker}(f^{k_0+k+1}) = \text{Ker}(f^{k_0+k})$.
3. On peut par exemple se placer dans $E = \mathbb{K}[X]$.

Exercice 19.11

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in L(E)$.

1. Montrer que $(\text{Im}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion.
2. Soit $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Im}(f^{k_0}) = \text{Im}(f^{k_0+1})$. Montrer que :
$$\forall k \geq k_0, \quad \text{Im}(f^k) = \text{Im}(f^{k_0}).$$
3. Donner un espace E et un endomorphisme f dont la suite $(\text{Im}(f^n))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire.

indication

1. Sans difficulté.
2. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \text{Im}(f^{k_0+k+1}) = \text{Im}(f^{k_0+k})$.
3. On peut par exemple se placer dans $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 19.12

Soit E un espace vectoriel. Soit $f \in L(E)$.

1. Montrer que :

$$\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0_E\} \iff \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2).$$

2. Montrer que :

$$\text{Im}(f) + \text{Ker}(f) = E \iff \text{Im}(f) = \text{Im}(f^2).$$

indication

Sans contexte de dimension finie, tout montrer par double implication et les égalités ensemblistes par double inclusion.

Exercice 19.13

Soit E un espace vectoriel.

Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Soient F_1, \dots, F_q des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_q$.

Pour tout $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, on définit l'application :

$$p_i : \begin{cases} E = F_1 \oplus \dots \oplus F_q & \longrightarrow F_i \\ x = x_1 + \dots + x_q & \longmapsto x_i. \end{cases}$$

1. Montrer que (p_1, \dots, p_q) est un *système complet de projecteurs*, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket, p_i \text{ est un projecteur} \\ \forall (i, j) \in \llbracket 1, q \rrbracket^2, i \neq j \implies p_i \circ p_j = 0_{L(E)} \\ p_1 + \dots + p_q = \text{Id}_E. \end{cases}$$

2. Réciproquement, on suppose qu'il existe un système complet de projecteurs (p_1, \dots, p_q) .
Montrer que $E = \text{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_q)$.

indication

2.
 - ◆ Montrer que $E = \text{Im}(p_1) + \dots + \text{Im}(p_q)$.
 - ◆ Pour montrer le caractère direct, il s'agit d'appliquer la définition de la somme directe de q sous-espaces vectoriels^a :

$$\forall y_1 \in \text{Im}(p_1), \dots, y_q \in \text{Im}(p_q), y_1 + \dots + y_q = 0_E \implies y_1 = \dots = y_q = 0_E.$$

a. l'auteur est conscient que cette définition est rigoureusement au programme de spé, pas de sup

Exercice 19.14

- Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
- On note $T := \left\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty([a, b], \mathbb{R}) \mid \varphi(a) = \varphi(b) = 0 \right\}$.
- On pose, pour $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ et $\varphi \in T$, $\langle f \mid \varphi \rangle := \int_a^b f(t)\varphi(t) dt$.

Soit $u \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ telle que, pour tout $\varphi \in T$, $\langle u' \mid \varphi \rangle = 0$.

1. Montrer que $\text{Ker}(\langle \mathbb{1}_{[a,b]} \mid \cdot \rangle) \subset \text{Ker}(\langle u \mid \cdot \rangle)$.
2. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $\varphi \in T$, $\langle u \mid \varphi \rangle = \lambda \langle \mathbb{1}_{[a,b]} \mid \varphi \rangle$.

indication

1.
 - ◆ Les applications $\langle \mathbb{1}_{[a,b]} \mid \cdot \rangle$ et $\langle u \mid \cdot \rangle$ sont des formes linéaires définies sur l'espace vectoriel T .
 - ◆ Soit $\varphi \in \text{Ker}(\langle \mathbb{1}_{[a,b]} \mid \cdot \rangle)$. En posant $\Phi : x \mapsto \int_a^x \varphi(t) dt$, montrer que $\Phi \in T$.
 - ◆ Ensuite, procéder par intégration par parties pour montrer que $\langle u \mid \varphi \rangle = 0$.
2. Il s'agit de montrer que, pour deux formes linéaires φ et ψ , on a :

$$\text{Ker}(\varphi) \subset \text{Ker}(\psi) \implies \exists \lambda \in \mathbb{R} : \psi = \lambda\varphi.$$

Exercice 19.15

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Déterminer l'ensemble $C(E) := \left\{ u \in L(E) \mid \forall v \in L(E), u \circ v = v \circ u \right\}$.

Indication. On pourra admettre que tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire.

indication

Raisonnement par analyse-synthèse. En se donnant $u \in C(E)$, on peut considérer $x \neq 0_E$ et $D := \text{Vect}(x)$. En notant S un supplémentaire de D , on peut considérer la projection sur D parallèlement à S , dans l'objectif de montrer que $(x, u(x))$ est liée. On montre ensuite que u est une homothétie.

résultat

$$C(E) = \{ \lambda \text{Id}_E \mid \lambda \in \mathbb{K} \}.$$