

## Colle 20

### Limites et continuité

- ▶ Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant lundi prochain.
- ▶ Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



#### Exercice 20.1

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $x \mapsto \frac{x^{n-1}(x^n - 1)}{x - 1}$  est prolongeable par continuité en 1.

#### Exercice 20.2

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \lim_{p \rightarrow +\infty} \lim_{q \rightarrow +\infty} \cos(p! \pi x)^q = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x).$$

#### Exercice 20.3

1. Montrer que  $\cos(\cdot)$  n'admet pas de limite en  $+\infty$ .
2. Quel résultat plus général peut-on établir pour des fonctions périodiques ?

#### Exercice 20.4

Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues coïncidant sur une partie dense de  $\mathbb{R}$ . Que peut-on dire de  $f$  et  $g$  ? Le démontrer.

#### Exercice 20.5

Que dire d'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue admettant des limites finies en  $+\infty$  et  $-\infty$  ? Le démontrer.

#### Exercice 20.6

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow [0, 1]$  continue telle que :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall s, t \geq 0, f(s+t) = f(s)f(t). \end{cases}$$

Montrer que :

$$\exists \alpha \geq 0 : \forall t \geq 0, f(t) = e^{-\alpha t}.$$

#### Exercice 20.7

1. Montrer que :

$$\forall x, y > 0, |\ln(x) - \ln(y)| \leq \frac{|x - y|}{\min(x, y)}.$$

2. Que peut-on en déduire sur la fonction  $\ln(\cdot)$  ?

### Exercice 20.8

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et périodique.

Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \exists x_t \in \mathbb{R} : f(x_t + t) = f(x_t).$$

### Exercice 20.9

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Soit  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Montrer que :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \implies \frac{1}{n} \int_0^n f(x) dx \rightarrow \ell.$$

### Exercice 20.10

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Soit  $a \in I$ . Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ .

On suppose que :

- (i) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction  $f_n$  est continue en  $a$ ;
- (ii) il existe  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Montrer que  $f$  est continue en  $a$ .

### Exercice 20.11

Soit  $[a, b]$  un segment de  $\mathbb{R}$ . Soit  $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$  telle que :

$$\forall x, y \in [a, b], x \neq y \implies |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

1. Montrer que  $f$  admet un unique point fixe, que l'on notera  $\alpha$ .
2. On définit la suite  $(x_n)_n$  par :

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

Montrer que  $(x_n)_n$  converge vers  $\alpha$ .

3. On considère la fonction :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ x + \frac{1}{1+x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Le résultat précédent est-il toujours vrai ?

### Exercice 20.12

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et périodique.

1. Montrer que  $f$  est bornée et atteint ses bornes.
2. Montrer que  $f$  est uniformément continue sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice 20.13

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction uniformément continue.

1. Montrer que :

$$\exists a, b \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq ax + b.$$

2. Les fonctions polynomiales de degré 2 sont-elles uniformément continues sur  $\mathbb{R}_+$  ?