Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2025 – 2026
William GREGORY

Colle 20 • INDICATIONS
Limites et continuité

Exercice 20.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $x \longmapsto \dfrac{x^{n-1}(x^n - 1)}{x - 1}$ est prolongeable par continuité en 1.

indication

On a $x^n - 1 = \dots$. Il s'agit alors de passer à la limite.

Exercice 20.2

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{p \to +\infty} \lim_{q \to +\infty} \cos(p!\pi x)^q = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x).$$

indication

Se donner $x \in \mathbb{R}$ et distinguer deux cas :

- si $x \in \mathbb{Q}$, montrer que, à partir d'un certain p, le nombre $p!\pi x$ est un multiple de 2π ;
- si $x \notin \mathbb{Q}$, montrer que $|p!\pi x| < 1$.

Exercice 20.3

1. Montrer que $\cos(\cdot)$ n'admet pas de limite en $+\infty$.
2. Quel résultat plus général peut-on établir pour des fonctions périodiques ?

indication

1. Utiliser deux suites qui convergent vers $+\infty$ et aboutir à une contradiction avec la caractérisation séquentielle de la limite et l'unicité de la limite.
2. De la même manière, établir qu'une fonction périodique non constante n'admet pas de limite en $\pm\infty$.

Exercice 20.4

Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues coïncidant sur une partie dense de $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de f et g ? Le démontrer.

indication

Les fonctions f et g sont égales sur $\mathbb{R}$. On utilisera la caractérisation séquentielle de la continuité.

Exercice 20.5

Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue admettant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$? Le démontrer.

indication

La fonction f est bornée. À l'aide de la définition de la limite en $+\infty$ et $-\infty$, on étudiera f sur trois intervalles $]\infty, a]$, $[a, b]$ et $[b, +\infty[$ et le théorème des bornes atteintes.

Exercice 20.6

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow [0, 1]$ continue telle que :

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ \forall s, t \geqslant 0, \quad f(s+t) = f(s)f(t). \end{cases}$$

Montrer que :

$$\exists \alpha \geqslant 0 : \quad \forall t \geqslant 0, \quad f(t) = \mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

indication

- Étudier le cas $t = s$ et en déduire par récurrence $f(nt)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- En déduire $f\left(\frac{1}{n}\right)$ puis $f\left(\frac{n}{m}\right)$ en fonction de $f(1)$.
- En déduire f sur $\mathbb{Q}_+$ puis sur $\mathbb{R}_+$ par continuité-densité.

Exercice 20.7

1. Montrer que :

$$\forall x, y > 0, \quad \left|\ln(x) - \ln(y)\right| \leqslant \frac{|x-y|}{\min(x, y)}.$$

2. Que peut-on en déduire sur la fonction $\ln(\cdot)$?

indication

1. On utilise l'inégalité « $\ln(1+t) \leqslant t$ » avec t tel que $1 + t = \frac{x}{y}$ (en supposant $x \geqslant y > 0$).

2. L'idée est que, en réussissant à minorer $\min(x, y)$ par une constante non nulle, on majore $\frac{1}{\min(x, y)}$ par une constante.

résultat

2. La fonction $\ln(\cdot)$ est localement lipschitzienne.
Ou, pour $a > 0$, la fonction $\ln(\cdot)$ est lipschitzienne sur $[a, +\infty[$.

Exercice 20.8

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique.
Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \exists x_t \in \mathbb{R} : \quad f(x_t + t) = f(x_t).$$

indication

- On note T la période de f. Soit $t \in \mathbb{R}$.
- Considérer la fonction $g_t : x \longmapsto f(x+t) - f(x)$.
- Montrer que f est bornée et atteint ses bornes : fixer a et b tel que $f(a) = \min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ et $b = \max_{x \in \mathbb{R}} f(x)$.
- Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à g_t avec a et b (sur $[a, b]$ ou $[b, a]$).

Exercice 20.9

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
Montrer que :

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{n} \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \ell.$$

indication

En notant $v_n := \frac{1}{n} \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x \longrightarrow \ell$, écrire $v_n - \ell$ comme une intégrale et couper en deux morceaux suivant la définition de $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.

Exercice 20.10

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$.
On suppose que :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en a ;

(ii) il existe $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N_\varepsilon, \quad \forall x \in I, \quad \left| f_n(x) - f(x) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Montrer que f est continue en a.

indication

Écrire la définition quantifiée de la continuité de f en a et l'hypothèse. Pour ε et n assez grand ($n \geqslant N_\varepsilon$ donné par l'hypothèse), majorer $|f(x) - f(a)|$ en écrivant que :

$$f(x) - f(a) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a).$$

Exercice 20.11

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Soit $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ telle que :

$$\forall x, y \in [a, b], \quad x \neq y \implies \left|f(x) - f(y)\right| < |x - y|.$$

1. Montrer que f admet un unique point fixe, que l'on notera α.

2. On définit la suite $(x_n)_n$ par :

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f(x_n). \end{cases}$$

Montrer que $(x_n)_n$ converge vers α.

3. On considère la fonction :

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ x + \dfrac{1}{1+x} & \text{si} \quad x \geqslant 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Le résultat précédent est-il toujours vrai ?

indication

1.
- ♦ Utiliser le théorème des bornes atteintes pour fixer α tel que $|\alpha - f(\alpha)| = \min\limits_{x \in [a,b]} |x - f(x)|$.
- ♦ Noter $\beta := f(\alpha)$. Supposer $\alpha \neq f(\alpha) = \beta$. En étudiant $|\beta - f(\beta)|$, aboutir à une contradiction.
- ♦ Pour l'unicité, se donner α_1 et α_2 deux points fixes et appliquer l'hypothèse avec α_1 et α_2 en les supposant différents pour aboutir à une contradiction.

2. Il s'agit de montrer que $u_n := |x_n - \alpha| \longrightarrow 0$. On commencera par montrer que $(u_n)_n$ est strictement décroissante et minorée, ce qui assurera sa convergence vers $\ell \geqslant 0$. L'objectif est de montrer que $\ell = 0$. On pourra, grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass, extraire $(x_{\varphi(n)})_n$ convergeant vers β, et utiliser que $u_n \geqslant \ell$, pour aboutir à une contradiction si $\ell > 0$.

3. Un dessin est éclairant pour visualiser que g n'a pas de point fixe.

Exercice 20.12

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique.

1. Montrer que f est bornée et atteint ses bornes.

2. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

indication

1. Théorème des bornes atteintes.

2. Utiliser le théorème de Heine sur un segment un peu plus grand qu'une période (par exemple $[-T, 2T]$) et translater le problème.

Exercice 20.13

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

1. Montrer que :

$$\exists a, b \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \;\; f(x) \leqslant ax + b.$$

2. Les fonctions polynomiales de degré 2 sont-elles uniformément continues sur $\mathbb{R}_+$?

indication

1. Utiliser la définition de la continuité uniforme avec $\varepsilon = 1$ et, avec l'inégalité triangulaire, majorer $\left|f(x) - f(0)\right|$ en utilisant que :

$$f(x) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{(k+1)x}{n}\right) - f\left(\frac{kx}{n}\right)\right),$$

où n est choisi judicieusement.

2. Écrire la contraposée de la question précédente.