

Colle 21

Dérivation

- ▶ Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant lundi prochain.
- ▶ Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Exercice 21.1

1. Montrer que la fonction $\ln(\cdot)$ est localement lipschitzienne.
2. La fonction $\ln(\cdot)$ est-elle lipschitzienne sur $]0, +\infty[$?

Exercice 21.3

Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} .
Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non nulle et dérivable telle que :

$$f(a) = f(b) = 0.$$

Montrer que :

$$\exists c, d \in]a, b[: \begin{cases} f'(c) > 0 \\ f'(d) < 0. \end{cases}$$

Exercice 21.5

1. À l'aide d'outils du cours sur la dérivation, montrer l'inégalité :

$$\forall x > 0, \frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Déterminer la nature de la suite de terme général $\sum_{\ell=n+1}^{kn} \frac{1}{\ell}$.

Exercice 21.2

Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} .

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\int_a^b f(t) dt = (b-a)f(c).$$

Exercice 21.4

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(a) = a \quad \text{et} \quad f'(a) < 1.$$

Peut-on comparer $f(x)$ et x sur un intervalle $]a - \delta, a + \delta[$ avec $\delta > 0$?

Exercice 21.6

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

On suppose que $f(0) = 0$.

Montrer que :

$$\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{f'(0)}{2}.$$

Exercice 21.7

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell \implies \frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell.$$

2. Que dire de la réciproque ?

Exercice 21.8

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 telle que :

$$\begin{cases} f(a) = f(b) = 0 \\ f'(a) = f'(b) = 0. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\exists c \in]a, b[: f(c) = f''(c).$$

Exercice 21.9

Centrale 2022 MP épreuve II (questions 8, 9 et 10)

Soit $K \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{C}^K([0, 1], \mathbb{R})$. Soient $x_1 < \dots < x_K$ K réels distincts de $[0, 1]$.

On admet qu'il existe K polynômes L_1, \dots, L_K de $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ tels que $P = \sum_{j=1}^K f(x_j)L_j$ vérifie

$$\forall \ell \in \llbracket 1, K \rrbracket, \quad P(x_\ell) = f(x_\ell).$$

1. Pour tout $k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket$, montrer qu'il existe au moins $K-k$ réels distincts de $[0, 1]$ en lesquels $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule.

2. En déduire l'inégalité :

$$\forall k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket, \quad \|f^{(k)} - P^{(k)}\|_\infty \leq \|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\|_\infty.$$

3. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\max_{k \in \llbracket 0, K-1 \rrbracket} \|f^{(k)}\|_\infty \leq \|f^{(K)}\|_\infty + C \sum_{\ell=1}^K |f(x_\ell)|.$$

Exercice 21.10

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note, pour $j \in \llbracket 0, N+1 \rrbracket$, $a_j := \frac{j}{N+1}$.

On note \mathcal{V}_N l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$, nulles en 0 et en 1, et affines sur les segments $[a_j, a_{j+1}]$ (pour $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$).

1. Soit $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Exprimer explicitement l'unique fonction ψ_j de \mathcal{V}_N telle que :

$$\forall \ell \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad \psi_j(a_\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \neq j \\ 1 & \text{si } \ell = j. \end{cases}$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. On définit $f_N : x \mapsto \sum_{j=1}^N f(a_j)\psi_j(x)$.

$$\text{Montrer que : } \sqrt{\int_0^1 |f'(t) - f_N'(t)|^2 dt} \leq \frac{1}{N+1} \|f''\|_\infty.$$