Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2025 – 2026

William GREGORY

Colle 21 • INDICATIONS

Dérivation

Exercice 21.1

1. Montrer que la fonction $\ln(\cdot)$ est localement lipschitzienne.

2. La fonction $\ln(\cdot)$ est-elle lipschitzienne sur $]0, +\infty[$?

indication

1. Utiliser l'inégalité des accroissements finis sur $[x, y]$ avec $a, b > 0$.

2. Regarder $x = \dfrac{1}{n}$ et $y = \dfrac{1}{2n}$ par exemple, et faire tendre $n \to +\infty$.

Exercice 21.2

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.
Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = (b - a)\,f(c).$$

indication

On peut poser $m := \min\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M := \max\limits_{f \in [a,b]} f(x)$, qui existent et sont atteints d'après le théorème des bornes atteintes.
On en déduire donc que $m \leqslant \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$, et on conclut par le théorème des valeurs intermédiaires.
Si le théorème des accroissements finis a été vu, on peut l'appliquer à $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, vérifiant les bonnes hypothèses d'après le théorème fondamental de l'analyse.

Exercice 21.3

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction non nulle et dérivable telle que :

$$f(a) = f(b) = 0.$$

Montrer que :

$$\exists c, d \in]a, b[: \quad \begin{cases} f'(c) > 0 \\ f'(d) < 0. \end{cases}$$

Exercice 21.4

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(a) = a \quad \text{et} \quad f'(a) < 1.$$

Peut-on comparer $f(x)$ et x sur un intervalle $]a - \delta, a + \delta[$ avec $\delta > 0$?

indication

En posant $g : x \longmapsto f(x) - x$, on obtient que g est localement décroissante, c'est-à-dire décroissante sur $]a - \delta, a + \delta[$.

résultat

$$\exists \delta > 0 : \begin{cases} \forall x \in]a - \delta, a[, & f(x) > x \\ \forall x \in]a, a + \delta[, & f(x) < x. \end{cases}$$

Exercice 21.5

1. À l'aide d'outils du cours sur la dérivation, montrer l'inégalité :

$$\forall x > 0, \quad \frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

2. Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Déterminer la nature de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{\ell=n+1}^{kn} \frac{1}{\ell}$.

indication

1. On utilisera l'inégalité des accroissements finis.

2. La première question permet d'obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{\ell=n+1}^{kn} \ln(\ell+1) - \ln(\ell) \leqslant \sum_{\ell=n+1}^{kn} \frac{1}{\ell} \leqslant \sum_{\ell=n+1}^{kn} \ln(\ell) - \ln(\ell-1).$$

On peut ensuite appliquer le théorème d'encadrement.

résultat

$$\sum_{\ell=n+1}^{kn} \frac{1}{\ell} \longrightarrow \ln(k).$$

Exercice 21.6

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.
On suppose que $f(0) = 0$.
Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{f'(0)}{2}.$$

indication

Soit $\varepsilon > 0$. On commence par fixer $\delta_\varepsilon > 0$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \leqslant \delta_\varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f'(0)x| \leqslant \varepsilon |x|.$$
On applique cette formule à $x = \dfrac{k}{n^2}$ pour n assez grand, et on somme ces inégalités.

Exercice 21.7

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que :
$$f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell.$$

2. Que dire de la réciproque ?

indication

1. On utilisera la définition quantifiée de $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists A_\varepsilon \in \mathbb{R} : \forall x \geqslant A_\varepsilon, \quad \left| f'(x) - \ell \right| \leqslant \varepsilon.$$
On utilise le théorème des accroissements finis :
$$\exists c_x \in \,]A_\varepsilon, x[\, : \frac{f(x) - f(A_\varepsilon)}{x - A_\varepsilon} = f'(c_x).$$

2. Utiliser $f : x \longmapsto \sin(x)$.

résultat

2. La réciproque est fausse.

Exercice 21.8

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que :
$$\begin{cases} f(a) = f(b) = 0 \\ f'(a) = f'(b) = 0. \end{cases}$$
Montrer que :
$$\exists c \in \,]a, b[\, : \quad f(c) = f''(c).$$

indication

On pourra considérer les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x} f(x)$, $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x} f'(x)$ et utiliser le théorème de Rolle.

Exercice 21.9

Centrale 2022 MP épreuve II (questions 8, 9 et 10)

Soit $K \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathscr{C}^K\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Soient $x_1 < \cdots < x_K$ K réels distincts de $[0,1]$.

On admet qu'il existe K polynômes L_1, ..., L_K de $\mathbb{R}_{K-1}[X]$ tels que $P = \sum_{j=1}^{K} f(x_j)L_j$ vérifie

$$\forall \ell \in [\![1,K]\!], \quad P(x_\ell) = f(x_\ell).$$

1. Pour tout $k \in [\![0,K-1]\!]$, montrer qu'il existe au moins $K-k$ réels distincts de $[0,1]$ en lesquels $f^{(k)} - P^{(k)}$ s'annule.

2. En déduire l'inégalité :

$$\forall k \in [\![0,K-1]\!], \quad \left\|f^{(k)} - P^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(k+1)} - P^{(k+1)}\right\|_\infty.$$

3. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\max_{k\in[\![0,K-1]\!]} \left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(K)}\right\|_\infty + C\sum_{\ell=1}^{K}\left|f(x_\ell)\right|.$$

indication

1. Raisonner par récurrence et utiliser le théorème de Rolle.
2. ◆ Montrer que

$$\forall g \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}), \quad \forall y \in [0,1], \quad \|g\|_\infty \leqslant \|g'\|_\infty + |g(y)|.$$

   ◆ Utiliser ce résultat en un point y judicieusement choisi.
3. Montrer que

$$\forall k \in [\![0,K-1]\!], \quad \left\|f^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \left\|f^{(K)}\right\|_\infty + \left\|P^{(K)}\right\|_\infty + \left\|P^{(k)}\right\|_\infty.$$

Exercice 21.10

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note, pour $j \in [\![0,N+1]\!]$, $\mathrm{a}_j := \dfrac{j}{N+1}$.
On note $\mathscr{V}_N$ l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$, nulles en 0 et en 1, et affines sur les segments $[\mathrm{a}_j, \mathrm{a}_{j+1}]$ (pour $j \in [\![0,N]\!]$).

1. Soit $j \in [\![1,N]\!]$. Exprimer explicitement l'unique fonction ψ_j de $\mathscr{V}_N$ telle que :

$$\forall \ell \in [\![1,N]\!], \quad \psi_j(\mathrm{a}_\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \ell \neq j \\ 1 & \text{si} \quad \ell = j. \end{cases}$$

2. Soit $f \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. On définit $f_N : x \longmapsto \sum_{j=1}^{N} f(\mathrm{a}_j)\psi_j(x)$.

Montrer que : $\sqrt{\displaystyle\int_0^1 \left|f'(t) - f_N{}'(t)\right|^2 \mathrm{d}t} \leqslant \dfrac{1}{N+1}\|f''\|_\infty$.

indication

1. Un dessin peut éclairer.
2. On commence par étudier l'intégrale sur $[\mathrm{a}_{j-1}, \mathrm{a}_j]$ pour $j \in [\![1,N+1]\!]$.

À l'aide du théorème des accroissements finis, on montre que : $\displaystyle\int_{a_{j-1}}^{a_j} \left|f'(t) - f_N{}'(t)\right|^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{(N+1)^3}\|f''\|^2$.

résultat

2. $\forall x \in [0,1], \quad \psi_j = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [0, a_{j-1}] \\ (N+1)(x - a_{j-1}) & \text{si} \quad x \in [a_{j-1}, a_j] \\ -(N+1)(x - a_{j+1}) & \text{si} \quad x \in [a_j, a_{j+1}] \\ 0 & \text{si} \quad x \in [a_{j+1}, 1]. \end{cases}$