

Colle 22

Formules de Taylor, Dénombrément

- ▶ Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant lundi prochain.
- ▶ Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Formules de Taylor

Exercice 22.1

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

Exercice 22.2

Montrer que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Exercice 22.3

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Exercice 22.4

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Exercice 22.5

Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} z^k.$$

Exercice 22.6

Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} . Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$.
Montrer que :

$$|f(b) - f(a)| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \sup_{x \in [a, b]} |f''(x)|.$$

Exercice 22.7

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit I un intervalle de \mathbb{R} .

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^{n+1} . Soit $a \in I$.

Montrer que pour tout $x \in I$, il existe $c_x \in \mathbb{R}$ compris entre a et x tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + f^{(n+1)}(c_x) \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exercice 22.8

Soit $u \in \mathcal{C}^4([0, 1], \mathbb{R})$. Soit f une fonction réelle telle que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad -u''(x) = f(x).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $h := \frac{1}{n+1}$ et, pour $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $x_i := ih$.

1. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comment approximer $f(x_i)$ avec $u(x_{i-1})$, $u(x_i)$ et $u(x_{i+1})$?
2. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Définir l'erreur d'approximation ε_i .
3. Déterminer $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de u tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |\varepsilon_i| \leq C h^2.$$

Dénombrement

Les exercices de cette section sont issus du cahier de calcul pour la classe de Terminale, disponible à l'adresse <https://colasbd.github.io/cdc-lycee/>.

Exercice 22.9

Un cadenas est sécurisé par un code à quatre chiffres.

Calculer le nombre de codes :

1. en tout ;
2. avec des chiffres tous différents ;
3. avec des chiffres pairs uniquement ;
4. se terminant par le chiffre « 9 » ;
5. avec des chiffres tous différents et rangés dans l'ordre croissant.

Exercice 22.11

Dans un ensemble de dix personnes dont trois garçons, on s'intéresse à un groupe d'amis comportant six personnes.

Déterminer le nombre de groupes :

1. possibles ;
2. ne comportant pas de garçon ;
3. comportant au moins un garçon ;
4. comportant autant de garçons que de fille.

Exercice 22.13

Un groupe de sept amis part en week-end.

Déterminer le nombre de façons de choisir un responsable de la vaisselle, un responsable du rangement et un responsable du ménage :

1. si aucun membre ne peut cumuler plusieurs fonctions ;
2. si un même membre peut cumuler plusieurs fonctions ;
3. si un même membre ne peut cumuler au plus que deux fonctions.

Exercice 22.10

Douze personnes constituent une association et doivent choisir un bureau, composé d'un président, d'un trésorier et d'un secrétaire.

Déterminer le nombre de bureaux :

1. possibles ;
2. sachant que Pierre et Jean ne veulent pas siéger ensemble ;
3. ne contenant pas les deux personnes les plus jeunes du groupe ;
4. contenant le doyen et la personne la plus jeune du groupe.

Exercice 22.12

On dispose de cinq pantalons différents que l'on veut ranger dans un meuble à trois tiroirs.

Déterminer le nombre de façons de ranger ces pantalons :

1. en tout ;
2. de sorte que tous les pantalons soient dans le même tiroir ;
3. de sorte qu'un seul tiroir soit vide ;
4. de sorte qu'aucun tiroir ne reste vide.

Exercice 22.14

On s'intéresse aux anagrammes du mot « FICHE », qu'elles aient un sens, ou non.

Combien d'anagrammes peut-on former :

1. en tout ?
2. si l'on commence par les voyelles ?
3. si le mot se termine par un « E » ?
4. si l'on souhaite qu'il y ait une alternance entre les voyelles et les consonnes ?