Lycée Chateaubriand
MPSI 3 • 2025 – 2026

William GREGORY

Colle 22 • INDICATIONS

Formules de Taylor, Dénombrement

Exercice 22.1

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

indication

Appliquer la formule de Taylor reste intégral, à l'ordre 2 pour l'inégalité de gauche, et à l'ordre 3 pour l'inégalité de droite.

Exercice 22.2

Montrer que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin(x) \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

indication

Appliquer la formule de Taylor reste intégral, à l'ordre 4 pour l'inégalité de gauche, et à l'ordre 6 pour l'inégalité de droite.

Exercice 22.3

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

indication

Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange avec la fonction $\sin(\cdot)$.

Exercice 22.4

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

indication

Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange avec la fonction $\cos(\cdot)$.

Exercice 22.5

Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} z^k.$$

indication

Utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange avec la fonction $t \longmapsto \exp(tz)$ avec $z \in \mathbb{C}$ fixé.

Exercice 22.6

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathscr{C}^2\big([a, b], \mathbb{R}\big)$ telle que $f'(a) = f'(b) = 0$.
Montrer que :

$$\big|f(b) - f(a)\big| \leqslant \frac{(b-a)^2}{4} \sup_{x \in [a,b]} \big|f''(x)\big|.$$

Exercice 22.7

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$. Soit $a \in I$.
Montrer que pour tout $x \in I$, il existe $c_x \in \mathbb{R}$ compris entre a et x tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + f^{(n+1)}(c_x)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

indication

Utiliser la formule de Taylor avec reste intégral et encadrer l'intégrale par des valeurs de la dérivée $(n+1)$-ième pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 22.8

Soit $u \in \mathscr{C}^4\big([0, 1], \mathbb{R}\big)$. Soit f une fonction réelle telle que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad -u''(x) = f(x).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $h := \dfrac{1}{n+1}$ et, pour $i \in [\![0, n+1]\!]$, $x_i := i\,h$.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Comment approximer $f(x_i)$ avec $u(x_{i-1})$, $u(x_i)$ et $u(x_{i+1})$?

2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Définir l'erreur d'approximation ε_i.

3. Déterminer $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de u tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |\varepsilon_i| \leqslant C\,h^2.$$

indication

1. Utiliser la formule de Taylor-Young.

2. Il s'agit de la différence entre $f(x_i)$ et l'approximation déterminée précédemment.

3. On utilisera la formule de Taylor reste intégral aux points (x_{i+1}, x_i) et (x_{i-1}, x_i).

résultat

1. $\dfrac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})}{h^2}$.
2. $\varepsilon_i = \dfrac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})}{h^2} - f(x_i)$.
3. $C = \dfrac{\sup_{x\in[0,1]}\left|u^{(4)}(x)\right|}{12}$.

Les exercices de cette section sont issus du cahier de calcul pour la classe de Terminale, disponible à l'adresse `https://colasbd.github.io/cdc-lycee/`.

Exercice 22.9

Un cadenas est sécurisé par un code à quatre chiffres.
Calculer le nombre de codes :

1. en tout ;
2. avec des chiffres tous différents ;
3. avec des chiffres pairs uniquement ;
4. se terminant par le chiffre « 9 » ;
5. avec des chiffres tous différents et rangés dans l'ordre croissant.

indication

(issu du Cahier de calcul T$^{\text{ale}}$ disponible à l'adresse `https://colasbd.github.io/cdc-lycee/`)

résultat

1. $10^4 = 10\ 000$.
2. $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\ 040$.
3. $5^4 = 625$.
4. $10^3 = 1\ 000$.
5. $\dbinom{10}{4} = 210$.

Exercice 22.10

Douze personnes constituent une association et doivent choisir un bureau, composé d'un président, d'un trésorier et d'un secrétaire.
Déterminer le nombre de bureaux :

1. possibles ;
2. sachant que Pierre et Jean ne veulent pas siéger ensemble ;
3. ne contenant pas les deux personnes les plus jeunes du groupe ;
4. contenant le doyen et la personne la plus jeune du groupe.

indication

(issu du Cahier de calcul T$^{\text{ale}}$ disponible à l'adresse `https://colasbd.github.io/cdc-lycee/`)

résultat

1. $12 \times 11 \times 10 = 1\ 320$.
2. $12 \times 11 \times 10 - 3 \times 2 \times 10 = 1\ 260$.
3. $10 \times 9 \times 8 = 720$.
4. $3 \times 2 \times 10 = 60$.

Exercice 22.11

Dans un ensemble de dix personnes dont trois garçons, on s'intéresse à un groupe d'amis comportant six personnes.
Déterminer le nombre de groupes :

1. possibles ;
2. ne comportant pas de garçon ;
3. comportant au moins un garçon ;
4. comportant autant de garçons que de fille.

indication

(issu du Cahier de calcul T$^{\text{ale}}$ disponible à l'adresse `https://colasbd.github.io/cdc-lycee/`)

résultat

1. $\binom{10}{6} = 210$.
2. 7.
3. $\binom{10}{6} - 7 = 203$.
4. $\binom{3}{3} \times \binom{7}{3} = 35$.

Exercice 22.12

On dispose de cinq pantalons différents que l'on veut ranger dans un meuble à trois tiroirs.
Déterminer le nombre de façons de ranger ces pantalons :

1. en tout ;
2. de sorte que tous les pantalons soient dans le même tiroir ;
3. de sorte qu'un seul tiroir soit vide ;
4. de sorte qu'aucun tiroir ne reste vide.

indication

(issu du Cahier de calcul T$^{\text{ale}}$ disponible à l'adresse `https://colasbd.github.io/cdc-lycee/`)

résultat

1. $3^5 = 243$.
2. 3.
3. $3 \times (2^5 - 2) = 90$.
4. $3^5 - 3 \times (2^5 - 2) - 3 = 150$.

Exercice 22.13

Un groupe de sept amis part en week-end.
Déterminer le nombre de façons de choisir un responsable de la vaisselle, un responsable du rangement et un responsable du ménage :

1. si aucun membre ne peut cumuler plusieurs fonctions ;
2. si un même membre peut cumuler plusieurs fonctions ;
3. si un même membre ne peut cumuler au plus que deux fonctions.

indication

(issu du Cahier de calcul T$^{\text{ale}}$ disponible à l'adresse `https://colasbd.github.io/cdc-lycee/`)

résultat

1. $7 \times 6 \times 5 = 210$.
2. $7^3 = 343$.
3. $7^3 - 7 = 336$.

Exercice 22.14

On s'intéresse aux anagrammes du mot « FICHE », qu'elles aient un sens, ou non.
Combien d'anagrammes peut-on former :

1. en tout ?
2. si l'on commence par les voyelles ?
3. si le mot se termine par un « E » ?
4. si l'on souhaite qu'il y ait une alternance entre les voyelles et les consonnes ?

indication

(issu du Cahier de calcul T$^{\text{ale}}$ disponible à l'adresse `https://colasbd.github.io/cdc-lycee/`)

résultat

1. $5! = 120$.
2. $2! \times 3! = 12$.
3. $4! = 24$.
4. $3 \times 2 \times 2 = 12$.