

Colle 23

Développements limités, Dénombrément

- ▶ Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant lundi prochain.
- ▶ Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.



Développements limités

Exercice 23.1

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x) - f(0)}{x}}{x}.$$

Exercice 23.3

Donner le développement limité à l'ordre 3 en 1 de $\cos \circ \ln$.

Exercice 23.5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le développement limité en 0 à l'ordre $2n + 2$ de $x \mapsto \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

Exercice 23.7

On considère la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le développement limité à l'ordre n de f en 0.

Exercice 23.2

Soit $p \in]0, 1[$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{Déterminer } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{p}{n} e^{i \frac{t}{n}}}{1 - \left(1 - \frac{p}{n}\right) e^{i \frac{t}{n}}}.$$

Exercice 23.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le développement limité en 0 à l'ordre $2n + 2$ de $\arcsin(\cdot)$.

Exercice 23.6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le développement limité en 0 à l'ordre n de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Exercice 23.8

$$\text{Déterminer } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi}{2 \tanh(\pi \sqrt{\varepsilon}) \sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2\varepsilon}.$$

Exercice 23.9

Soit $a > 0$.

$$\text{Calculer } \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{\arctan(x) - \arctan(a)}.$$

Exercice 23.10

Soit $u \in \mathcal{C}^4([0, 1], \mathbb{R})$. Soit f une fonction réelle telle que :

$$\forall x \in [0, 1], \quad -u''(x) = f(x).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $h := \frac{1}{n+1}$ et, pour $i \in \llbracket 0, n+1 \rrbracket$, $x_i := ih$.

1. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Comment approximer $f(x_i)$ avec $u(x_{i-1})$, $u(x_i)$ et $u(x_{i+1})$?
2. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Définir l'erreur d'approximation ε_i .
3. Déterminer $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de u tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad |\varepsilon_i| \leq Ch^2.$$

Dénombrement

Les exercices de cette section sont issus du cahier de calcul pour la classe de Terminale, disponible à l'adresse <https://colasbd.github.io/cdc-lycee/>.

Exercice 23.11

J'ai cinq fromages différents et trois desserts différents.

De combien de façons puis-je remplir mon assiette si je peux prendre :

1. trois fromages et un dessert ?
2. ce que je veux ?

Exercice 23.13

Soit $n \geq 2$. On considère n points A_1, \dots, A_n deux à deux distincts.

Combien peut-on tracer de segments (non réduits à un point) dont les extrémités sont parmi ces points ?

Exercice 23.15

Au poker, un *brelan* est une main de cinq cartes, dont trois sont de même hauteur, et les deux autres différentes. Par exemple, trois « rois », un « 7 » et un « 2 » forment un brelan.

Avec un jeu de 52 cartes, combien de brelans peut-on former ?

Exercice 23.12

Un *palindrome* est un mot qui est identique s'il est lu de la gauche vers la droite ou inversement.

Combien y a-t-il de palindromes :

1. de quatre lettres ?
2. de cinq lettres ?

Exercice 23.14

Soit $n \geq 3$. On considère un polygone régulier à n sommets, c'est-à-dire un polygone dont tous les côtés et tous les angles sont égaux.

Combien ce polygone possède-t-il de diagonales ?

Exercice 23.16

Au poker, une *double paire* est une main de cinq cartes composée de deux couples de cartes de même hauteur (mais distinctes), et d'une cinquième carte différente. Par exemple, deux « rois », deux « 10 » et un « 7 » forment une double paire.

Avec un jeu de 52 cartes, combien de doubles paires peut-on former ?