Colle 23 • INDICATIONS
Développements limités, Dénombrement

Exercice 23.1

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Calculer :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x}.$$

indication

Écrire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour f et à l'ordre 1 pour f'.

résultat

$$\lim_{x \to 0} \frac{f'(x) - \frac{f(x)-f(0)}{x}}{x} = \frac{f''(0)}{2}.$$

Exercice 23.2

Soit $p \in]0,1[$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{p}{n} e^{i\frac{t}{n}}}{1 - \left(1 - \frac{p}{n}\right) e^{i\frac{t}{n}}}$.

indication

On fera un développement limité des exponentielles.

résultat

$$\frac{\frac{p}{n} e^{i\frac{t}{n}}}{1 - \left(1 - \frac{p}{n}\right) e^{i\frac{t}{n}}} \longrightarrow \frac{p}{p - it}.$$

Exercice 23.3

Donner le développement limité à l'ordre 3 en 1 de $\cos \circ \ln$.

résultat

$$\cos\big(\ln(x)\big) = 1 - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{2} + \underset{x \to 1}{o}\Big((x-1)^3\Big).$$

Exercice 23.4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le développement limité en 0 à l'ordre $2n+2$ de $\arcsin(\cdot)$.

indication

Donner le développement limité en 0 à l'ordre $2n+1$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ puis intégrer.

résultat

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right) \quad \text{et}$$
$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(2k+1)(k!)^2} x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right).$$

Exercice 23.5

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le développement limité en 0 à l'ordre $2n+2$ de $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

indication

On pourra commencer par dériver la fonction proposée.

résultat

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \cdots + \frac{2}{2n+1}x^{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right).$$

Exercice 23.6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le développement limité en 0 à l'ordre n de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

résultat

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\binom{2k}{k} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n).$$

Exercice 23.7

On considère la fonction :

$$f : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le développement limité à l'ordre n de f en 0.

indication

1. On montrera que f est de classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ en étudiant $f^{(k)}$ en 0.
2. On peut alors appliquer la formule de Taylor-Young.

Exercice 23.8

Déterminer $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\pi}{2\tanh(\pi\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon}} - \dfrac{1}{2\varepsilon}$.

indication

On fera un développement limité à l'ordre 3 de $\cosh(x)$ et $\sinh(x)$ en 0.

résultat

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\pi \coth\left(\pi\sqrt{\varepsilon}\right)}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{1}{2\varepsilon} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 23.9

Soit $a > 0$.

Calculer $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^a - a^x}{\arctan(x) - \arctan(a)}$.

indication

- Pour $a \neq 1$, déterminer un équivalent de $x^a - a^x$ à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 en a.
- Déterminer de même un équivalent de $\arctan(x) - \arctan(a)$ à l'aide d'un développement limité à l'ordre 1 en a.

résultat

$$\lim_{x \to a} \frac{x^a - a^x}{\arctan(x) - \arctan(a)} = \begin{cases} a^a(1+a^2)\big(1-\ln(a)\big) & \text{si} \quad a \neq 1 \\ 2 & \text{si} \quad a = 1. \end{cases}$$

Exercice 23.10

Soit $u \in \mathscr{C}^4\big([0,1], \mathbb{R}\big)$. Soit f une fonction réelle telle que :

$$\forall x \in [0,1], \quad -u''(x) = f(x).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $h := \dfrac{1}{n+1}$ et, pour $i \in [\![0, n+1]\!]$, $x_i := i\,h$.

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Comment approximer $f(x_i)$ avec $u(x_{i-1})$, $u(x_i)$ et $u(x_{i+1})$?
2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Définir l'erreur d'approximation ε_i.
3. Déterminer $C \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de u tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |\varepsilon_i| \leqslant C\,h^2.$$

indication

1. Utiliser la formule de Taylor-Young.
2. Il s'agit de la différence entre $f(x_i)$ et l'approximation déterminée précédemment.
3. On utilisera la formule de Taylor reste intégral aux points (x_{i+1}, x_i) et (x_{i-1}, x_i).

résultat

1. $\dfrac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})}{h^2}$.
2. $\varepsilon_i = \dfrac{-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})}{h^2} - f(x_i)$.
3. $C = \dfrac{\sup_{x\in[0,1]}\left|u^{(4)}(x)\right|}{12}$.

Les exercices de cette section sont issus du cahier de calcul pour la classe de Terminale, disponible à l'adresse `https://colasbd.github.io/cdc-lycee/`.

Exercice 23.11

J'ai cinq fromages différents et trois desserts différents.
De combien de façons puis-je remplir mon assiette si je peux prendre :

1. trois fromages et un dessert ?
2. ce que je veux ?

indication

(issu du Cahier de calcul T$^{\text{ale}}$ disponible à l'adresse `https://colasbd.github.io/cdc-lycee/`)

résultat

1. $\dbinom{5}{3} \times 3 = 30$.
2. $2^8 = 256$.

Exercice 23.12

Un *palindrome* est un mot qui est identique s'il est lu de la gauche vers la droite ou inversement.
Combien y a-t-il de palindromes :

1. de quatre lettres ?
2. de cinq lettres ?

indication

(issu du Cahier de calcul T$^{\text{ale}}$ disponible à l'adresse `https://colasbd.github.io/cdc-lycee/`)

résultat

1. $26^2 = 676$.
2. $26^3 = 17\,576$.

Exercice 23.13

Soit $n \geqslant 2$. On considère n points $A_1, \dots, A_n$ deux à deux distincts.
Combien peut-on tracer de segments (non réduits à un point) dont les extrémités sont parmi ces points ?

indication

(issu du Cahier de calcul T^{ale} disponible à l'adresse `https://colasbd.github.io/cdc-lycee/`)

résultat

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Exercice 23.14

Soit $n \geqslant 3$. On considère un polygone régulier à n sommets, c'est-à-dire un polygone dont tous les côtés et tous les angles sont égaux.
Combien ce polygone possède-t-il de diagonales ?

indication

(issu du Cahier de calcul T^{ale} disponible à l'adresse `https://colasbd.github.io/cdc-lycee/`)

résultat

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Exercice 23.15

Au poker, un *brelan* est une main de cinq cartes, dont trois sont de même hauteur, et les deux autres différentes. Par exemple, trois « rois », un « 7 » et un « 2 » forment un brelan.
Avec un jeu de 52 cartes, combien de brelans peut-on former ?

indication

(issu du Cahier de calcul T^{ale} disponible à l'adresse `https://colasbd.github.io/cdc-lycee/`)

résultat

$$\binom{13}{1} \times \binom{4}{3} \times \binom{12}{2} \times \binom{4}{1} \times \binom{4}{1} = 54\,912.$$

Exercice 23.16

Au poker, une *double paire* est une main de cinq cartes composée de deux couples de cartes de même hauteur (mais distinctes), et d'une cinquième carte différente. Par exemple, deux « rois », deux « 10 » et un « 7 » forment une double paire.
Avec un jeu de 52 cartes, combien de doubles paires peut-on former ?

indication

(issu du Cahier de calcul T$^{\text{ale}}$ disponible à l'adresse `https://colasbd.github.io/cdc-lycee/`)

résultat

$$\binom{13}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{11}{1} \times \binom{4}{1} = 123\,552.$$