William GREGORY

# Colle 24

## Séries

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à me rendre par mail pendant les vacances, ou à déposer dans la boîte en B013 le lundi 27 avril.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

### Exercice 24.1

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$ converge et calculer sa somme.

### Exercice 24.2

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum_n |u_n|^2$ et $\sum_n |v_n|^2$ convergent.

Montrer que $\sum_n u_n v_n$ converge.

### Exercice 24.3

*On admet que $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.*

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.

### Exercice 24.4

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_n := \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n\,\mathrm{H}_n}$.

### Exercice 24.5

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_n := \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n\,{\mathrm{H}_n}^2}$.

### Exercice 24.6

**1.** Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la série $\sum_{n\geqslant 1}\big(\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)\big)$ converge.

**2.** Calculer dans ce cas sa somme.

### Exercice 24.7

Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

## Exercice 24.8

Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \underset{\alpha \to 1^+}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1}.$$

## Exercice 24.9

Justifier l'existence et calculer :

$$\lim_{a \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}.$$

## Exercice 24.10

Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n(n+r)}$ converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+r)} = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k}.$$

## Exercice 24.11

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{H}_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

**1.** Montrer que :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+ : \quad \mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

On fixe un tel $\gamma$.

**2.** Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_k := \int_k^{k+1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n := \mathrm{H}_n - \ln(n) - \gamma$.

- **(a)** Soit $n \geqslant 2$. Déterminer une expression de $v_n$ faisant apparaître les $a_k$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- **(b)** Montrer que $v_n = \mathcal{O}\left( \frac{1}{n} \right)$.

*On a ainsi établi que* $\mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + \mathcal{O}\left( \frac{1}{n} \right)$.

## Exercice 24.12 Transformation d'Abel.

Soient $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n := \sum_{k=0}^{n} v_k$.

**1.** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k + \varepsilon_n V_n.$$

**2.** On suppose que $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite nulle et que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que $\sum_n \varepsilon_n v_n$ converge.

**3.** Soit $\alpha > 0$. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$.

- **(a)** Montrer que la série $\sum_n \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.
- **(b)** En déduire la nature des séries $\sum_n \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum_n \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$.