

Colle 24 • INDICATIONS

Séries

Exercice 24.1

Montrer que la série $\sum_{n \geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ converge et calculer sa somme.

indication

Remarquer que

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = (\ln(n+1) - \ln(n)) - (\ln(n) - \ln(n-1))$$

et utiliser les résultats sur les séries télescopiques.

résultat

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\ln(2).$$

Exercice 24.2

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum_n |u_n|^2$ et $\sum_n |v_n|^2$ convergent.

Montrer que $\sum_n u_n v_n$ converge.

indication

Utiliser l'inégalité « $|ab| \leq \frac{|a|^2 + |b|^2}{2}$ » (à savoir démontrer), et conclure par comparaison pour les séries à termes positifs.

Exercice 24.3

On admet que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.

indication

Pour la convergence, un équivalent suffit. Pour le calcul, on commencera par décomposer en éléments simples et on pourra s'aider de la décomposition $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

résultat

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3} - 3.$$

Exercice 24.4

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n H_n}$.

indication

- ◆ Procéder par comparaison série intégrale pour montrer que $H_n \sim \ln(n)$.
- ◆ Procéder par comparaison série intégrale pour déterminer la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$.
- ◆ Conclure par critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

résultat

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n H_n}$ diverge.

Exercice 24.5

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n H_n^2}$.

indication

- ◆ Procéder par comparaison série intégrale pour montrer que $H_n \sim \ln(n)$.
- ◆ Procéder par comparaison série intégrale pour déterminer la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$.
- ◆ Conclure par critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

résultat

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n H_n^2}$ converge.

Exercice 24.6

1. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la série

$$\sum_{n \geq 1} (\ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2))$$

converge.

2. Calculer dans ce cas sa somme.

indication

1. Utiliser les propriétés du logarithme pour établir l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2) = \alpha \ln(n) + \frac{\beta}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2. Procéder par télescopage ou changement d'indice.

résultat

1. $\ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2) = (1+a+b) \ln(n) + \frac{a+2b}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, d'où $a = -2$ et $b = 1$.

2. $\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)) = -\ln(2)$.

Exercice 24.7

Déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$.

indication

Utiliser une comparaison série intégrale avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$.

résultat

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}.$$

Exercice 24.8

Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \underset{\alpha \rightarrow 1^+}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1}.$$

indication

Procéder par comparaison série intégrale avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$.

Exercice 24.9

Justifier l'existence et calculer :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + n^2}.$$

indication

Procéder par comparaison série-intégrale pour établir une formule du type :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, \quad \int_1^{N+1} \frac{a}{a^2 + x^2} dx \leq \sum_{n=1}^N \frac{a}{a^2 + n^2} \leq \int_0^N \frac{a}{a^2 + x^2} dx.$$

résultat

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 24.10

Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+r)}$ converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+r)} = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \frac{1}{k}.$$

indication

- ◆ Écrire $\frac{1}{n(n+r)} = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+r} \right)$.
- ◆ Écrire, pour $N > r$,

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+r)} = \frac{1}{r} \left(\sum_{n=1}^r \frac{1}{n} - \sum_{n=N+1}^{N+r} \frac{1}{k} \right),$$

et majorer la deuxième somme, puis passer à la limite.

Exercice 24.11

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Montrer que :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+ : H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

On fixe un tel γ .

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_k := \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{t}\right) dt$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n := H_n - \ln(n) - \gamma$.

(a) Soit $n \geq 2$. Déterminer une expression de v_n faisant apparaître les a_k pour $k \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que $v_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a ainsi établi que $H_n = \ln(n) + \gamma + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

indication

1. En posant $u_n := H_n - \ln(n)$, montrer que $(u_n)_n$ est bornée et monotone, en exploitant une comparaison série intégrale.

2. (a) Utiliser que $H_n = \frac{1}{n} + H_{n-1}$, $\frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt$ et $\ln(n) = \int_1^n \frac{1}{t} dt$.

(b) Montrer que $0 < a_k < \frac{1}{k(k+1)}$ puis que $0 \leq v_n \leq \frac{1}{n}$.

Exercice 24.12 Transformation d'Abel.

Soient $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $V_n := \sum_{k=0}^n v_k$.

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^n \varepsilon_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} (\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k + \varepsilon_n V_n.$$

2. On suppose que $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite nulle et que $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que $\sum_n \varepsilon_n v_n$ converge.

3. Soit $\alpha > 0$. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus (2\pi\mathbb{Z})$.

(a) Montrer que la série $\sum_n \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.

(b) En déduire la nature des séries $\sum_n \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}$ et $\sum_n \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}$.

indication

1. Exprimer v_k en fonction de V_k et V_{k-1} et faire un changement d'indice.

2. Utiliser la transformation d'Abel pour exprimer le terme général de la suite des sommes partielles. Vérifier la convergence de chaque terme à l'aide des hypothèses.

3. (a) Vérifier les hypothèses du théorème d'Abel avec deux suites judicieusement choisies.
(b) Revenir aux parties réelles et imaginaires.