Colle 25

Séries

- Après votre colle, il vous est demandé de reprendre les exercices traités et de les rédiger sur feuille. Ce travail est à déposer dans la boîte en B013 avant lundi prochain.
- Vous trouverez le sujet et des indications sur la page ci-contre.

Exercice 25.1

On admet que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge et que* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 25.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive telle que $\sum_n \ln(u_n)$ converge.

Lesquelles des séries ci-dessous convergent ?

$$\sum_n u_n \quad ; \quad \sum_n \mathrm{e}^{-n\,u_n} \quad ; \quad \sum_n \frac{u_n}{2^n} \quad ; \quad \sum_n (u_{n+1} - u_n).$$

Exercice 25.3

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\,\mathrm{H}_n}$.

Exercice 25.4

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\,{\mathrm{H}_n}^2}$.

Exercice 25.5

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) \neq 0$.

1. Montrer que $\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,\mathrm{d}t \sim \frac{f(0)}{n}$.

2. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 25.6

Justifier l'existence et calculer :
$$\lim_{a\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a}{a^2+n^2}.$$

Exercice 25.7

Soit $a>0$. Déterminer la nature de la série :
$$\sum_{n\geqslant 1} a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}},$$
en fonction des valeurs de a.

Exercice 25.8

Déterminer la nature des séries :
$$\sum_n \sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right) \quad \text{et} \quad \sum_n \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right).$$

Exercice 25.9

Soit $p\in\mathbb{N}^*$.

Montrer que $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(pn)!}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 25.10

Soit $(u_n)_n$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}\cos(u_{n-1}). \end{cases}$$
Montrer que $\displaystyle\sum_n u_n$ converge.

Exercice 25.11

> *On admet que* $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ *converge et que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Exercice 25.12

Montrer que, pour tout $x\in\,]-1,1[$, la série $\displaystyle\sum_n n\,x^n$ converge, et calculer sa somme.

Exercice 25.13

Déterminer la nature de la série :
$$\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

Exercice 25.14

Montrer que :
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\underset{\alpha\to 1^+}{\sim}\frac{1}{\alpha-1}.$$

Exercice 25.15

Soit $\alpha>1$.

Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 25.16

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{H}_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+ : \quad \mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

On fixe un tel γ.

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{a}_k := \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{t} \right) \mathrm{d}t$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{v}_n := \mathrm{H}_n - \ln(n) - \gamma$.

(a) Soit $n \geqslant 2$. Déterminer une expression de v_n faisant apparaître les a_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que $\mathrm{v}_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a ainsi établi que $\mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 25.17

Soit $(a_n)_n$ une suite réelle positive telle que $\sum_n a_n$ converge.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{R}_n := \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$.

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k\, a_k = -(n+1)\mathrm{R}_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{R}_{k+1}.$$

2. Montrer que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k\, a_k \longrightarrow 0$.

Exercice 25.18 Suite décroissante sommable.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle positive décroissante.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge.

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n\, u_n \leqslant 2 \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor + 1}^{n} u_k.$$

(b) En déduire que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n := \frac{1}{1 + n^2 u_n}$.

Montrer que :

$$\sum v_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \text{ diverge}.$$