William GREGORY

Colle 25 • INDICATIONS

Séries

Exercice 25.1

On admet que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ *converge et que* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{(2n+1)^2}$ converge et calculer sa somme.

indication

Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

résultat

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Exercice 25.2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive telle que $\sum_n \ln(u_n)$ converge.

Lesquelles des séries ci-dessous convergent ?

$$\sum_n u_n \ ; \quad \sum_n \mathrm{e}^{-n\,u_n} \ ; \quad \sum_n \frac{u_n}{2^n} \ ; \quad \sum_n (u_{n+1} - u_n).$$

indication

- ▶ Utiliser une condition nécessaire de convergence.
- ▶ Majorer à partir d'un certain rang le terme général et conclure par comparaison.
- ▶ Déterminer un équivalent.
- ▶ C'est une série télescopique : on connaît sa nature lorsque l'on connaît la nature de la suite associée.

Exercice 25.3

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\,\mathrm{H}_n}$.

indication

- Procéder par comparaison série intégrale pour montrer que $\mathrm{H}_n \sim \ln(n)$.
- Procéder par comparaison série intégrale pour déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\,\ln(n)}$.
- Conclure par critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

résultat

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\,\mathrm{H}_n}$ diverge.

Exercice 25.4

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\,\mathrm{H}_n{}^2}$.

indication

- Procéder par comparaison série intégrale pour montrer que $\mathrm{H}_n \sim \ln(n)$.
- Procéder par comparaison série intégrale pour déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\,\ln(n)}$.
- Conclure par critère de comparaison pour les séries à termes positifs.

résultat

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\,\mathrm{H}_n}$ converge.

Exercice 25.5

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, telle que $f(0) \neq 0$.

1. Montrer que $\int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,\mathrm{d}t \sim \frac{f(0)}{n}$.

2. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,\mathrm{d}t$.

indication

1. On utilise l'inégalité triangulaire intégrale et le fait que $t^n \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ lorsque $t \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ pour montrer que :

$$\left| \int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,\mathrm{d}t - \frac{f(0)}{n} \right| \leqslant \frac{1}{n} \sup_{t\in\left[0,\frac{1}{n}\right]} |f(t) - f(0)|,$$

où $\sup_{t\in\left[0,\frac{1}{n}\right]} |f(t) - f(0)| \longrightarrow 0$ par continuité.

2. On utilise les équivalents.

résultat

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha} \int_0^{\frac{1}{n}} f(t^n)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha > 0.$$

Exercice 25.6

Justifier l'existence et calculer :

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2}.$$

indication

Procéder par comparaison série-intégrale pour établir une formule du type :

$$\forall N\ in \mathbb{N}^*, \quad \int_1^{n+1} \frac{a}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{a}{a^2+n^2} \leqslant \int_0^N \frac{a}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

résultat

$$\lim_{a\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{a^2+n^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 25.7

Soit $a > 0$. Déterminer la nature de la série :

$$\sum_{n\geqslant 1} a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}},$$

en fonction des valeurs de a.

indication

- Écrire $a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$ sous forme exponentielle.
- Utiliser (et savoir démontrer) que $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln(n)$.

résultat

$$\sum_{n\geqslant 1} a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}} \text{ converge} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha < \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Exercice 25.8

Déterminer la nature des séries :
$$\sum_n \sin\left(\pi(2-\sqrt{3})^n\right) \quad \text{et} \quad \sum_n \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right).$$

indication

- Pour $\sum_n \sin(\pi(2-\sqrt{3})^n)$, utiliser un équivalent.
- Pour $\sum_n \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$, commencer par calculer $\sin(\pi(2-\sqrt{3})^n) + \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

résultat

Les deux séries convergent.

Exercice 25.9

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que $\sum_n \frac{1}{(pn)!}$ converge et calculer sa somme.

indication

- L'inégalité de Taylor-Lagrange permet de montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(tz)^n}{n!} = e^{tz}$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $z \in \mathbb{C}$.
- Utiliser les racines p-ièmes de l'unité.

résultat

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(pn)!} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \exp(\omega^k) \text{ avec } \omega = e^{\frac{2i\pi}{p}}.$$

Exercice 25.10

Soit $(u_n)_n$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} \cos(u_{n-1}). \end{cases}$$
Montrer que $\sum_n u_n$ converge.

indication

Montrer que $u_n \longrightarrow 0$, puis montrer que $u_n = \frac{(-1)^n}{n}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Exercice 25.11

On admet que $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$ *converge et que* $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Justifier l'existence et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

indication

- L'existence peut s'obtenir par les résultats sur les séries alternées.
- Pour le calcul de la somme, il s'agit de calculer les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$, puis de les soustraire.

résultat

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{\pi^2}{24}.$$

Exercice 25.12

Montrer que, pour tout $x\in\,]-1,1[$, la série $\sum_n n\,x^n$ converge, et calculer sa somme.

indication

On peut dériver l'identité « $\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ », puis passer à la limite lorsque $n\to+\infty$.

résultat

$$\sum_{n=0}^{+\infty}n\,x^n=\frac{x}{(1-x)^2}.$$

Exercice 25.13

Déterminer la nature de la série :

$$\sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

indication

Commencer par écrire que :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1},$$

puis utiliser le critère des séries alternées pour la première expression.

résultat

La série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ diverge.

Exercice 25.14

Montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \underset{\alpha\to 1^+}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}.$$

indication

Procéder par comparaison série intégrale avec la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$.

Exercice 25.15

Soit $\alpha > 1$.

Déterminer un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

indication

Procéder par comparaison série intégrale avec la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$.

résultat

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Exercice 25.16

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{H}_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que :

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}_+ : \quad \mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

On fixe un tel γ.

2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{a}_k := \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{t}\right) \mathrm{d}t$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{v}_n := \mathrm{H}_n - \ln(n) - \gamma$.

(a) Soit $n \geqslant 2$. Déterminer une expression de v_n faisant apparaître les a_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

(b) Montrer que $\mathrm{v}_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a ainsi établi que $\mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$.

indication

1. En posant $u_n := \mathrm{H}_n - \ln(n)$, montrer que $(u_n)_n$ est bornée et monotone, en exploitant une comparaison série intégrale.
2. **(a)** Utiliser que $\mathrm{H}_n = \dfrac{1}{n} + \mathrm{H}_{n-1}$, $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t$ et $\ln(n) = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.

   (b) Montrer que $0 \leqslant \mathrm{a}_k \leqslant \dfrac{1}{k(k+1)}$ puis que $0 \leqslant \mathrm{v}_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.

résultat

2. **(a)** $\mathrm{v}_n = \dfrac{1}{n} - \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{a}_k$.

Exercice 25.17

Soit $(a_n)_n$ une suite réelle positive telle que $\displaystyle\sum_n a_n$ converge.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{R}_n := \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k$.

   Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^{n} k\, a_k = -(n+1)\mathrm{R}_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{R}_{k+1}.$$

2. Montrer que $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, a_k \longrightarrow 0$.

indication

1. On écrit $a_k = \mathrm{R}_k - \mathrm{R}_{k+1}$ pour séparer la somme en deux.

   Pour le deuxième terme, la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} k\, \mathrm{R}_{k+1}$, on utilise que $k = (k+1) - 1$.

   De la sorte, la somme contient une partie télescopique, et le deuxième terme désiré.
2. Diviser l'égalité précédente par n, puis utiliser (démontrer) le théorème de Cesàro pour montrer que $\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{R}_{k+1} \longrightarrow 0$.

Exercice 25.18 Suite décroissante sommable.

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle positive décroissante.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge.

(a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n\, u_n \leqslant 2 \sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor+1}^{n} u_k.$$

(b) En déduire que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n := \dfrac{1}{1+n^2 u_n}$.

Montrer que :

$$\sum v_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad \sum u_n \text{ diverge.}$$

indication

1. **(a)** Distinguer deux cas suivant la parité de n et minorer $\displaystyle\sum_{k=\lfloor n/2 \rfloor+1}^{n} u_k$ par le plus petit terme (utiliser la décroissance de $(u_n)_n$) que l'on multiplie par le nombre de termes.

(b) Par encadrement en utilisant la question précédente.

2. Raisonner par contraposée et montrer que $\dfrac{1}{n} = o(v_n)$.