Anneaux et corps

QCOP ANN.1

Soient $(R_1, +_1, \times_1)$ et $(R_2, +_2, \times_2)$ deux anneaux.
Soit $f : R_1 \longrightarrow R_2$ un morphisme entre ces deux anneaux.

1. Définir « f est un morphisme de $(R_1, +_1, \times_1)$ dans $(R_2, +_2, \times_2)$ ».

2. Compléter et démontrer les propriétés suivantes :

$$f(0_{R_1}) = \ldots \ ; \qquad \forall x \in R_1,\ \ f(-x) = \ldots \ ; \qquad \forall x \in {R_1}^{\times},\ \ f(x^{-1}) = \ldots .$$

3. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des morphismes d'anneaux ? Justifier.

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \overline{z} \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{ccc} R_1 & \longrightarrow & R_1 \\ x & \longmapsto & 0_{R_1} \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & n \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0). \end{array}\right.$$

QCOP ANN.2

Soit $(R, +_R, \times_R)$ un anneau. On note 0_R le neutre pour $+_R$ et 1_R le neutre pour $\times_R$.

1. Définir l'ensemble des inversibles de R, noté $R^{\times}$.

2. Montrer que $\left(R^{\times}, \times_R\right)$ est un groupe.

3. **a)** Établir que $\mathbb{Z}^{\times} = \{-1, 1\}$.
On pourra utiliser des inégalités.
b) En déduire que $\left(\{-1, 1\}, \times\right)$ est un groupe.

QCOP ANN.3

Soit R un anneau.

1. Soient $a, b \in R$ tels que $ab = ba$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

2. Soit $u \in R$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$u^n = 0_R.$$

Montrer que $1_R - u$ est inversible dans R.

QCOP ANN.4

Soient $(R_1, +_1, \times_1)$ et $(R_2, +_2, \times_2)$ deux anneaux. On note $P := R_1 \times R_2$.

1. Définir le groupe produit $(P, +_P)$ où $+_B$ et l'élément neutre 0_P sont à préciser.

On note

$$\times_P : \left|\begin{array}{ccc} P^2 & \longrightarrow & P \\ \big((x, y), (x', y')\big) & \longmapsto & (xx', yy'). \end{array}\right.$$

2. **a)** Justifier que $\times_P$ permet à $(P, +_P, \times_P)$ d'être un anneau. Préciser l'élément neutre pour la multiplication 1_P.
b) Montrer que $P^{\times} = {R_1}^{\times} \times {R_2}^{\times}$.

3. Déterminer $\left(\mathbb{Z}^2\right)^{\times}$, en admettant que $\mathbb{Z}^{\times} = \{-1, 1\}$.