# Applications

## QCOP APP.1

Soient $E, F$ et $G$ trois ensembles.
Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. Définir « $f$ est injective ».
2. Montrer que, si $f$ et $g$ sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
3. On suppose que $g \circ f$ est injective.
   a) Montrer que $f$ est injective.
   b) À l'aide d'un contre exemple, montrer que $g$ n'est pas nécessairement injective.

## QCOP APP.2

Soient $E, F$ et $G$ trois ensembles.
Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.

1. Définir « $g$ est surjective ».
2. Montrer que, si $f$ et $g$ sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. On suppose que $g \circ f$ est surjective.
   a) Montrer que $g$ est surjective.
   b) À l'aide d'un contre exemple, montrer que $f$ n'est pas nécessairement surjective.

## QCOP APP.3

Soient $E, F$ deux ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ deux applications.

1. On suppose que $f$ et $g$ sont bijectives.
   a) On admet que $g \circ f$ est bijective. Que vaut dans ce cas $(g \circ f)^{-1}$ ?
   b) Le démontrer
2. On suppose que $f$ est bijective. Montrer que $f^{-1}$ est bijective et que $(f^{-1})^{-1} = f$.

## QCOP APP.4 ★

1. On suppose que $f$ et $g$ sont bijectives. Compléter :
$$\text{Alors} \quad g \circ f \text{ est } \ldots \quad \text{et} \quad (g \circ f)^{-1} = \ldots .$$
2. Montrer les implications suivantes :
$$\left.\begin{array}{l} g \circ f \text{ bijective} \\ f \text{ bijective} \end{array}\right\} \Longrightarrow g \text{ bijective} \qquad \text{et} \qquad \left.\begin{array}{l} g \circ f \text{ bijective} \\ g \text{ bijective} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ bijective.}$$
3. Donner deux applications $f$ et $g$ telles que $g \circ f$ est bijective mais $f$ ou $g$ n'est pas bijective.