Arithmétique des polynômes

On désignera par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

QCOP ARIPOL.1

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré 3, dont on note $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{C}$ ses racines complexes.

1. Énoncer et démontrer les relations coefficients racines pour P.
2. On prend $P = X^3 + X + 1$. Calculer :
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3}.$$

QCOP ARIPOL.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n.

1. Énoncer les relations coefficients racines pour P.
2. Les écrire explicitement pour $n = 2$, $n = 3$ et $n = 4$.
3. On suppose que $n = 2$ et $P(1) = 0$. Le polynôme P admet-il une autre racine réelle ? Si oui, l'exprimer en fonction des coefficients de P.

QCOP ARIPOL.3

1. Énoncer la formule de Taylor pour les polynômes.
2. Énoncer et démontrer la caractérisation de la multiplicité des racines d'un polynôme par les dérivées successives.
3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que 0 est racine de P' d'ordre 3.
   a) Le nombre 0 est-il nécessairement racine de P ?
   b) Si 0 est racine de P, que dire de la multiplicité de 0 en tant que racine de P ?

QCOP ARIPOL.4

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{K}[X]$.
2. Soient $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que :
$$\left.\begin{array}{l} P \wedge R = 1 \\ Q \wedge R = 1 \end{array}\right\} \implies (PQ) \wedge R = 1.$$
3. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \wedge Q = 1$. Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P^k \wedge Q = 1, \qquad \text{puis,} \qquad \forall k, \ell \in \mathbb{N}, \quad P^k \wedge Q^\ell = 1.$$
4. Soient $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $a \neq b$. Montrer que :
$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \quad (X - a)^n \wedge (X - b)^m = 1.$$

QCOP ARIPOL.5 ★

Soit $P \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

1. Donner la définition de « P est irréductible dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ ».

2. On suppose que P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. Montrer que :

$$P \text{ possède une racine dans } \mathbb{K} \quad \Longleftrightarrow \quad \deg(P) = 1.$$

3. On suppose que $\deg(P) \leqslant 3$. Montrer que

$$P \text{ n'a pas de racine dans } \mathbb{K} \quad \Longrightarrow \quad P \text{ est irréductible dans } \mathbb{K}[\mathrm{X}].$$

On pourra raisonner par contraposée.

4. Le résultat précédent reste-t-il vrai si $\deg(P) > 3$?

QCOP ARIPOL.6

Soit $P \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ un polynôme réel.

1. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une racine de P.

a) Que dire de $\overline{a}$?

b) Montrer que $(\mathrm{X} - a)(\mathrm{X} - \overline{a}) \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et que :

$$\exists Q \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] : \quad P = (\mathrm{X} - a)(\mathrm{X} - \overline{a})Q.$$

2. Énoncer le théorème de décomposition d'un polynôme réel en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Que nous donne la question précédente ?

QCOP ARIPOL.7

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.

1. Soient $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ quelconques.
Montrer qu'il existe un unique $L \in \mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad L(x_i) = y_i.$$

On pourra utiliser des arguments d'algèbre linéaire.

2. a) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Expliciter ce polynôme L, que l'on notera L_k, lorsque :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \quad y_i = \delta_i^k.$$

b) Montrer que la famille $(\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_n)$ ainsi obtenue est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

3. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Montrer que :

$$P = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)\mathrm{L}_k.$$