Arithmétique des entiers

QCOP ARI.1

1. Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$. Compléter :
$$\cdots \binom{n}{k} = \cdots \binom{n-1}{k-1}.$$

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Montrer que :
$$\left.\begin{array}{l} a \mid bc \\ a \wedge b = 1 \end{array}\right\} \implies a \mid c\,.$$

3. Soit p un nombre premier. En déduire que :
$$\forall k \in [\![1, p-1]\!], \quad p \,\Big|\, \binom{p}{k}\,.$$

QCOP ARI.2

Soit p un nombre premier. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.

1. Rappeler l'expression de $(a+b)^p$.

2. Montrer que :
$$\forall k \in [\![1, p-1]\!], \quad p \,\Big|\, \binom{p}{k}\,.$$

3. Montrer que :
$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p \ [p]\,.$$

QCOP ARI.3

1. Énoncer le lemme de Gauss.

2. Soit p un nombre premier. Montrer que :
$$\forall k \in [\![1, p-1]\!], \quad p \,\Big|\, \binom{p}{k}\,.$$

3. **a)** Montrer, par récurrence, que :
$$\forall a \in \mathbb{N}, \quad a^p \equiv a \ [p]\,.$$

b) Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que a n'est pas multiple de p. Montrer que :
$$a^{p-1} \equiv 1 \ [p]\,.$$

QCOP ARI.4

1. Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

2. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Montrer que :
$$\left.\begin{array}{l} a \wedge c = 1 \\ b \wedge c = 1 \end{array}\right\} \implies (ab) \wedge c = 1.$$

3. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \wedge b = 1$.
Montrer que :

a) $\forall k \in \mathbb{N}, \quad a^k \wedge b = 1\,;$

b) $\forall k, \ell \in \mathbb{N}, \quad a^k \wedge b^\ell = 1.$

QCOP ARI.5 ★

1. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha \wedge \beta = 1$. Montrer que :
$$\big[\alpha \mid \gamma \ \text{ et } \ \beta \mid \gamma\big] \iff \alpha\beta \mid \gamma.$$

2. Soient $n, m \geqslant 2$ deux entiers premiers entre eux. Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On considère :
$$(\mathrm{S}) \begin{cases} x \equiv a \ [m] \\ x \equiv b \ [n] \end{cases} \quad \text{et} \quad (\mathrm{S}_0) \begin{cases} x \equiv 0 \ [m] \\ x \equiv 0 \ [n]\,. \end{cases}$$

On admet qu'il existe une solution particulière $x_0 \in \mathbb{Z}$ du système (S).

a) Soit $x \in \mathbb{Z}$ une solution de (S). Montrer que $x - x_0$ est solution de (S_0).

b) En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de (S).