Calcul intégral

QCOP CINT.1

1. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse. Que nous apprend-il sur les fonctions continues ?
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient $a, b \in I$. Soient $u, v \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$. Montrer que :
$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$
3. Déterminer les primitives de la fonction $\ln(\cdot)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

QCOP CINT.2

1. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
2. Énoncer la formule donnant la dérivée d'une composée.
3. Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1(J, I)$. Soit $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})$. Montrer que :
$$\forall a, b \in J, \quad \int_a^b f\Big(\varphi(x)\Big)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

QCOP CINT.3

1. Donner la dérivée de la fonction $\arctan(\cdot)$.
2. Soit $a > 0$. À l'aide d'un changement de variable, déterminer une primitive de
$$x \longmapsto \frac{1}{x^2 + a^2}.$$
3. En déduire une méthode pour calculer une primitive d'une fonction
$$x \longmapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c},$$
où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

QCOP CINT.4

1. Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner l'expression de la dérivée de la fonction u^a.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ sur $[1, +\infty[$.
3. Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Soit $x \in [\mathrm{e}, +\infty[$. Calculer :
$$\int_{\mathrm{e}}^x \frac{1}{t\ln(t)^\beta}\,\mathrm{d}t.$$

QCOP CINT.5

Soit f une fonction continue. On note $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et, pour $a \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{I}_a := \displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. On suppose que f est une fonction paire.
   a) Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Dessiner et calculer (sans utiliser de primitive) l'intégrale I_a.
   b) Quelle est la parité de F ?
2. Mêmes questions en supposant que f est une fonction impaire.