Comparaisons des suites

QCOP CSUIT.1

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles.

1. Définir « $u_n \sim v_n$ ».
2. Montrer que, en général :
$$u_n \sim v_n \quad \not\Longrightarrow \quad e^{u_n} \sim e^{v_n}.$$
3. On suppose que $u_n \sim v_n$. Montrer que :
$$e^{u_n} \sim e^{v_n} \quad \Longleftrightarrow \quad u_n - v_n \longrightarrow 0.$$

QCOP CSUIT.2

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$.

1. Définir « $u_n \sim v_n$ ».
2. Montrer que, en général :
$$u_n \sim v_n \quad \not\Longrightarrow \quad \ln(u_n) \sim \ln(v_n).$$
3. On suppose que :
$$\begin{cases} u_n \sim v_n \\ v_n \longrightarrow \ell \in [0, +\infty] \setminus \{1\}. \end{cases}$$
   a) Vérifier que $\left(\dfrac{1}{\ln(v_n)}\right)_n$ est bornée.
   b) Montrer que
$$\frac{\ln(u_n)}{\ln(v_n)} - 1 \longrightarrow 0.$$
   c) En déduire que
$$\ln(u_n) \sim \ln(v_n).$$

QCOP CSUIT.3

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que :
$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \longrightarrow e^a.$$
2. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles. Montrer que, en général :
$$u_n \sim v_n \quad \not\Longrightarrow \quad {u_n}^n \sim {v_n}^n.$$

QCOP CSUIT.4

Soient $(u_n)_n, (v_n)_n$ deux suites réelles strictement positives à partir d'un certain rang. Soit $C > 0$.

1. Définir « $u_n \sim v_n$ » à l'aide d'une limite égale à 0.
2. Montrer que, en général :
$$u_n \sim v_n \quad \not\Longrightarrow \quad u_n + C \sim v_n + C.$$
3. Montrer que :
$$\left.\begin{array}{l} u_n \sim v_n \\ v_n \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad u_n + C \sim v_n + C.$$

QCOP CSUIT.5

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites complexes.

1. Donner les définitions avec quantificateurs de « $u_n = o(v_n)$ » et « $u_n = O(v_n)$ ».
2. Montrer que :
$$u_n = o(v_n) \quad \Longrightarrow \quad u_n = O(v_n)$$
3. Donner une suite qui est un $O(n)$ mais pas un $o(n)$.

QCOP CSUIT.6

1. Soient $(u_n)_n, (v_n)_n, (w_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
   a) Définir « $w_n = o(v_n)$ ».
   b) Caractériser « $u_n \sim v_n$ » à l'aide d'un $o(\cdot)$.
2. On admet que :
$$\exists \gamma \in \mathbb{R} : \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1).$$
Montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n).$$