Dérivabilité

Les intervalles I considérés ne sont pas vides ni réduits à un point.

QCOP DER.1

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Donner et démontrer, sans utiliser le théorème de composition des dérivées, la dérivée de la fonction $x \longmapsto f(ax+b)$.

2. **a)** On suppose que f est paire. Que dire de f' ?

b) On suppose que f est impaire. Que dire de f' ?

3. Soit $T > 0$ tel que f est T-périodique. Que dire de f' ?

QCOP DER.2

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $c \in I$.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
On considère les assertions suivantes :

(i) c est intérieur à I ;
(ii) f est dérivable en c ;
(iii) f admet un extremum local en c ;
(iv) $f'(c) = 0$.

1. Donner la définition de (iii).

2. Montrer que :
$$\text{(i)}, \text{(ii)}, \text{(iii)} \quad \Longrightarrow \quad \text{(iv)}.$$

3. Donner, pour chaque situation, un exemple de I, f et c tels que :

a) (ii) et (iv) sont vraies, mais (iii) est fausse ;

b) (iii) est vraie, mais (ii) est fausse ;

c) (ii) et (iii) sont vraies, mais (i) et (iv) sont fausses.

QCOP DER.3 ★

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $[a, b]$ un segment de I.

1. Soit $c \in \overset{\circ}{I}$ tel que f est dérivable en c. Donner une condition nécessaire pour que f admette un extremum local en c.

2. Énoncer et démontrer le théorème de Rolle.

3. Le théorème de Rolle est-il vrai si f est à valeurs complexes ?

QCOP DER.4

1. Énoncer le théorème de Rolle.

2. Énoncer et démontrer le théorème des accroissements finis.

3. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \neq 0.$$
Monter que f est injective.

QCOP DER.5

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Montrer que :

$$\begin{aligned} & f \text{ est dérivable en } a\,; \\ \iff\quad & \exists \varphi \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R}) : \quad \forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + (x-a)\varphi(x). \end{aligned}$$

2. Énoncer et démontrer un théorème de composition des dérivées.

QCOP DER.6

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I.

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. a) Montrer que :

$$f \text{ est constante sur } I \quad \iff \quad \left[\forall x \in \mathring{I},\ \ f'(x) = 0\right].$$

   b) Montrer que le résultat reste vrai si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.
3. Montrer que cette caractérisation est fausse si I n'est pas un intervalle.

QCOP DER.7

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Énoncer et démontrer l'inégalité des accroissements finis.
3. Établir les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} &\forall x \in \mathbb{R}, && \left|\sin(x)\right| \leqslant |x|\,; \\ &\forall x, y \in \mathbb{R}, && \left|\arctan(x) - \arctan(y)\right| \leqslant |x-y|\,; \\ &\forall x > 0, && \frac{1}{x+1} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

QCOP DER.8

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Définir les espaces $\mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{R})$, $\mathscr{C}^k(\mathbb{R})$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$) et $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.
2. Montrer que la dérivabilité en un point implique la continuité en ce point.
3. Donner un exemple de fonction continue non dérivable.
4. Donner un exemple de fonction dérivable mais pas de classe $\mathscr{C}^1$.

QCOP DER.9 ★

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $a \in I$. Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I\,; \\ f \text{ est dérivable sur } I \setminus \{a\}\,; \\ (f_{|I\setminus\{a\}})' \text{ admet pour limite } \ell \text{ en } a. \end{cases}$$

   a) Que dire si $\ell \in \mathbb{R}$? Le démontrer.
   b) Que dire si $\ell = \pm\infty$?
3. Montrer que $x \longmapsto \cos\left(\sqrt{x}\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.