Déterminants

QCOP DET.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Que vaut $\det(AB)$?

Les questions qui suivent sont indépendantes.

2. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\det(AA^\top) \geqslant 0.$$

3. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$\left[\exists k \in \mathbb{N}^* : A^k = 0_n\right] \implies \det(A) = 0.$$

4. Montrer que :

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) := \left\{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \det(A) = 1\right\}$$

est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

QCOP DET.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Définir la comatrice de A, notée $\mathrm{Com}(A)$.

2. Énoncer la formule reliant A à $\mathrm{Com}(A)$ et l'écrire dans le cas où A est inversible.

3. On se place dans le cas $n = 2$ et A inversible. Déterminer A^{-1} en fonction des coefficients de A.

QCOP DET.3

Soient $n, p \in \mathbb{N}$.
Soient les matrices $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et $C \in \mathrm{M}_p(\mathbb{C})$.

1. **a)** Calculer :

$$\det\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det\begin{pmatrix} A & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & \mathrm{I}_p \end{pmatrix}.$$

b) En déduire $\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix}$.

2. Généraliser : calculer le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

QCOP DET.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que :

$$A \text{ et } B \text{ sont semblables} \implies \det(A) = \det(B).$$

2. L'implication réciproque est-elle vraie en général ?

3. Le résultat subsiste-t-il pour A et B supposées seulement équivalentes ?

4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathrm{L}(E)$. Définir $\det(u)$.

QCOP DET.5 ★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
On note, pour $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_M : x \longmapsto \det(x\mathrm{I}_n - M)$.

1. Énoncer la formule donnant $\det(A)$ en fonction des coefficients de A.

2. **a)** Justifier que χ_A est une fonction polynomiale de degré n.

Ceci étant justifié, on note désormais χ_A le polynôme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ dont χ_A est la fonction polynomiale associée.

b) Montrer que :

$$\chi_A = \mathrm{X}^n - \mathrm{Tr}(A)\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

3. Montrer que :

$$A \text{ et } B \text{ sont semblables} \quad \Longrightarrow \quad \chi_A = \chi_B.$$

4. On se place dans le cas $n = 2$.

a) Exprimer χ_A en fonction de $\mathrm{Tr}(A)$ et $\det(A)$.

b) Montrer que $\chi_A(A) = 0_2$.

On fera particulièrement attention au « type » des objets écrits et manipulés.