Dimension finie

On désignera par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

QCOP DIM.1

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $f \in \mathrm{L}(E, F)$.

1. Donner la définition du rang de f.

2. **a)** Justifier l'existence de S supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E.

b) Montrer que $f_{|S}^{|\,\mathrm{Im}(f)}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

c) En déduire que :

$$\dim(E) = \dim\Big(\mathrm{Ker}(f)\Big) + \mathrm{rg}(f).$$

3. On se place dans le cas où $E = F$. Montrer que :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2) \iff \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2).$$

QCOP DIM.2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. **a)** Écrire la formule du rang pour l'application :

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} F \times G & \longrightarrow & F + G \\ (u, v) & \longmapsto & u + v, \end{array} \right.$$

dont on justifiera la linéarité et la surjectivité.

b) Montrer que l'application :

$$\psi : \left| \begin{array}{ccc} F \cap G & \longrightarrow & \mathrm{Ker}(\varphi) \\ u & \longmapsto & (u, -u) \end{array} \right.$$

est correctement définie et est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

c) Conclure que :

$$\dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G).$$

2. On considère les assertions suivantes :

(i) $F \cap G = \{0_E\}$;
(ii) $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$;
(iii) $E = F + G$.

Montrer que $E = F \oplus G$ si, et seulement si, deux des assertions sont vérifiées.

QCOP DIM.3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Énoncer le théorème du rang.
2. Donner un exemple de $f \in \mathrm{L}(E)$ tel que :
$$E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f).$$
3. Donner un exemple de $f \in \mathrm{L}\left(\mathbb{R}^2\right)$ tel que :
$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f).$$
Indication. On pourra chercher f tel que :
$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left\{(1,0)\right\}.$$

QCOP DIM.4

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E.
Compléter :
$$\begin{array}{lcl} \mathcal{F} \text{ est libre} & \Longrightarrow & |\mathcal{F}| \ \ldots\ n\,; \\ \mathcal{F} \text{ est génératrice} & \Longrightarrow & |\mathcal{F}| \ \ldots\ n\,; \\ \mathcal{F} \text{ est une base} & \Longrightarrow & |\mathcal{F}| \ \ldots\ n. \end{array}$$
2. Montrer que les implications réciproques ne sont pas vraies.
3. Soit $f \in \mathrm{L}(E)$.
Montrer que $\left\{f^k\right\}_{k \in \mathbb{N}}$ est liée.

QCOP DIM.5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit φ une forme linéaire non nulle de E.

1. Écrire la formule du rang pour φ.
2. On suppose que $n = 2$.
Montrer que φ est surjective.
3. Déterminer la dimension des espaces suivants :
$$\left\{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \mathrm{Tr}(M) = 0\right\},$$
$$\left\{P \in \mathbb{R}_2[\mathrm{X}] \;\middle|\; P(0) = 0\right\},$$
$$\left\{P \in \mathbb{R}_4[\mathrm{X}] \;\middle|\; \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\},$$
$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z = 0\right\}.$$

QCOP DIM.6

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1. Donner une base et la dimension de l'espace $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\mathrm{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathrm{A}_n(\mathbb{K})$.
On donnera une base et la dimension des espaces mis en jeu.
3. Donner une base et la dimension des sous-espaces des matrices triangulaires supérieures et diagonales de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Donner la dimension des espaces suivants :
$$\left\{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) \;\middle|\; \mathrm{Tr}(M) = 0\right\},$$
$$\left\{M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \mathrm{Tr}(M^\top M) = 0\right\}.$$

QCOP DIM.7

1. Soient E, F deux espaces vectoriels de même dimension finie.
Soit $u \in \mathrm{L}(E,F)$ injective. Que dire de u ?
2. On considère :
$$\varphi : \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}[\mathrm{X}] \\ P & \longmapsto & P - P'. \end{array}\right.$$
   a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la restriction $\varphi_{|\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]}$ est bijective.
   b) En déduire que φ est bijective.