Développements limités

QCOP DL.1

1. Donner le développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ en 0 de $\varepsilon \longmapsto \dfrac{1}{1-\varepsilon}$.
2. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \longmapsto \dfrac{1}{4+x^2}$.
3. **a)** Rappeler les développements limités à l'ordre 3 en 0 de $\cos(\cdot)$ et $\sin(\cdot)$.
   b) Déterminer un développement limité à l'ordre 3 de $\tan(\cdot)$.

QCOP DL.2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Rappeler la formule de Taylor-Young pour une fonction $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{C})$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer un développement limité à l'ordre n en 0 de $x \longmapsto \exp(zx)$.
3. En déduire les développements à l'ordre $2n$ en 0 de $\cosh(\cdot)$, $\sinh(\cdot)$, $\cos(\cdot)$ et $\sin(\cdot)$.

QCOP DL.3

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère :
$$f_\alpha : x \longmapsto (1+x)^\alpha.$$
   a) Calculer les dérivées successives de la fonction f_α.
   b) En déduire un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 de f_α.
2. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \longmapsto \sqrt{1+x}$.

QCOP DL.4

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0.
   Soient $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues sur I. On note F et G leur primitive s'annulant en 0.
   Montrer que :
$$f(t) = \underset{t \to 0}{o}\big(g(t)\big) \implies F(t) = \underset{t \to 0}{o}\big(G(t)\big).$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un développement limité à l'ordre n en 0 de :
$$x \longmapsto \ln(1+x) \quad \text{et} \quad x \longmapsto \arctan(x).$$

QCOP DL.5

1. Énoncer la formule de Taylor-Young.
2. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   Déterminer :
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$