Équations différentielles linéaires

On désignera par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

QCOP EDL.1

Soient a et b deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' + a(t)y = b(t). \tag{$*$}$$

1. On note A une primitive sur $\mathbb{R}$ de a.
On définit $y_p : t \longmapsto \lambda(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ où λ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ à déterminer.
On suppose que y_p est une solution particulière de $(*)$.

- **a)** Calculer ${y_p}' + ay_p$ et en déduire λ'.
- **b)** Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Exprimer, pour $t \geqslant t_0$, $\lambda(t) - \lambda(t_0)$ puis $\lambda(t)$.
- **c)** En déduire, pour $t \geqslant t_0$, $y_p(t)$.

2. Expliquer le principe de la méthode de variation de la constante.

QCOP EDL.2

Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$. Soit $m \in \mathbb{K}$. Soit $Q \in \mathbb{K}[X]$.
On considère l'équation différentielle suivante :

$$ay'' + by' + cy = Q(t)\mathrm{e}^{mt}, \tag{$*$}$$

et on note $P := aX^2 + bX + c$.

1. Soit $R \in \mathbb{K}[X]$. On considère $y_p : t \longmapsto R(t)\mathrm{e}^{mt}$.

- **a)** Calculer $P'(m)$ et $P''(m)$.
- **b)** Calculer $a{y_p}'' + b{y_p}' + cy_p$.
  On donnera le résultat sous la forme $\alpha R'' + \beta R' + \gamma R$.
- **c)** On suppose que y_p est une solution particulière de $(*)$.
  Donner, suivant la multiplicité de m comme racine de P, le degré de R.

2. Déduire de ce qui précède une méthode pour déterminer une solution particulière de $(*)$ lorsque $m = 0$ (*i.e.* le second membre est polynomial).

3. Déduire de même une méthode pour déterminer une solution particulière de $(*)$ lorsque Q est constant (*i.e.* le second membre est exponentiel).