Fonctions convexes

QCOP FCONV.1

1. Soit I un intervalle. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe sur I. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

   a) Que dire de $\mathscr{C}_f$ par rapport à ses cordes ?

   b) On suppose f dérivable sur I. Que dire de $\mathscr{C}_f$ par rapport à ses tangentes ?

2. Compléter et établir, par convexité, les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in \mathbb{R}, & e^x \geqslant \dots ; \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, & \ln(x) \leqslant \dots ; \\ \forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], & \dots \leqslant \sin(x) \leqslant \dots . \end{array}$$

QCOP FCONV.2

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

   a) Rappeler et illustrer la caractérisation de la convexité de f par sa dérivée seconde.

   b) On suppose que f est convexe. Soit $a \in \mathbb{R}$. Compléter et illustrer l'inégalité suivante :
$$f(x) \;\dots\; f(a) + f'(a)(x-a).$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
   On s'intéresse à $f : x \longmapsto x^n$. Compléter les cases du tableau suivant par « convexe » ou « concave » et démontrer les affirmations :

	sur $]-\infty, 0]$	sur $[0, +\infty[$
n pair	...	...
n impair	...	...

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :
$$\forall x \geqslant 0, \quad x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0.$$

QCOP FCONV.3 ★

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe.

1. Définir « f est convexe ».
2. Énoncer et démontrer l'inégalité de Jensen.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

   a) Montrer que
$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

   b) Montrer que
$$n \times f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(nx_i).$$

QCOP FCONV.4 ★

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Rappeler la définition du nombre x^α.

2. Soient $p, q \in]1, +\infty[$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

   a) Justifier que
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad e^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q}} \leqslant \frac{e^x}{p} + \frac{e^y}{q}.$$

   b) Montrer *l'inégalité de Young* :
$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+^*, \quad ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$