Fractions rationnelles

QCOP FRAC.1

On considère $F := \dfrac{X^4+1}{X^3-1} \in \mathbb{R}(X)$.

1. Calculer la partie entière de F, que l'on notera E.
2. a) Factoriser X^3-1 dans $\mathbb{C}[X]$.
   b) En déduire la forme de la décomposition en éléments simples de $F-E$ dans $\mathbb{C}(X)$, puis de F.
3. a) Factoriser X^3-1 dans $\mathbb{R}[X]$.
   b) On fixe $A_1, A_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que :
   $$F = E + \frac{A_1}{X-1} + \frac{A_2}{X^2+X+1}.$$
   Déterminer $\deg(A_1)$ et $\deg(A_2)$.

QCOP FRAC.2

1. On considère $F := \dfrac{1}{(X^2-1)^2} \in \mathbb{R}(X)$.
   a) Déterminer les racines de $(X^2-1)^2$ et leur multiplicité.
   b) Quelle est la forme de la décomposition en éléments simples de F ?
   c) Par des arguments de parité, montrer qu'il reste à déterminer deux coefficients pour obtenir la décomposition de F.
2. Donner la forme de la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle :
   $$\frac{X+1}{(X-1)^3(X-2)}.$$

QCOP FRAC.3

On considère $F := \dfrac{X^4+1}{X^3-1} \in \mathbb{R}(X)$.

1. Calculer la partie entière de F, notée E.
2. a) Factoriser X^3-1 dans $\mathbb{C}[X]$.
   b) En déduire la forme de la décomposition en éléments simples de E dans $\mathbb{C}(X)$, puis de F.
3. a) Factoriser X^3-1 dans $\mathbb{R}[X]$.
   b) On note $A_1, A_2 \in \mathbb{R}[X]$ tels que
   $$F = E + \frac{A_1}{X-1} + \frac{A_2}{X^2+X+1}.$$
   Déterminer $\deg(A_1)$ et $\deg(A_2)$.
4. Donner la forme de la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ des fractions :
   $$\frac{2}{(X^2-1)^2} \quad \text{et} \quad \frac{X+1}{(X-1)^3(X-2)}.$$

QCOP FRAC.4 ★

Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Soient $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On pose :
$$P := \lambda(X-a_1)^{\alpha_1} \dots (X-a_p)^{\alpha_p}.$$

1. a) Donner l'expression de P'.
   b) Déterminer $\beta_1, \dots, \beta_p \in \mathbb{R}$ tels que :
   $$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{p} \frac{\beta_k}{X-a_k}.$$
2. On suppose que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 1$.
   Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{a_k}$.