Groupes

QCOP GRP.1

Soient $(G_1, *_1), (G_2, *2)$ deux groupes.
Soit $f : G_1 \longrightarrow G_2$ un morphisme entre ces deux groupes.

1. Définir « f est un morphisme de $(G_1, *_1)$ dans $(G_2, *_2)$ ».

2. Introduire les notations nécessaires et fournir des démonstrations pour déterminer :

- **a)** l'image par f de l'élément neutre de G_1 ;
- **b)** l'image par f du symétrique d'un élément de G_1 ;
- **c)** l'image par f de x^n pour $x \in G_1$ et $n \in \mathbb{Z}$.

3.
- **a)** Définir le noyau de f et donner la caractérisation de l'injectivité de f par son noyau.
- **b)** Écrire la définition et la propriété précédentes dans le cas des groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$.

QCOP GRP.2

Soient $(G_1, *_1)$, $(G_2, *_2)$ deux groupes. Soit f un morphisme de $(G_1, *_1)$ dans $(G_2, *_2)$.

1. Soit $H_1 \subset G_1$. Définir « H_1 est un sous-groupe de G_1 ».

2. Soit H_2 un sous-groupe de G_2. Montrer que $f^{\langle -1 \rangle}[H_2]$ est un sous-groupe de G_1.

3. Soit B un sous-groupe de $\mathbb{Z}^2$. Montrer, à l'aide du résultat précédemment établi, que

$$H := \left\{ x \in \mathbb{Z} \;\middle|\; (x, 0) \in B \right\}$$

est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$.

QCOP GRP.3

Soient $(G_1, *_1)$, $(G_2, *_2)$ deux groupes. Soit f un morphisme de $(G_1, *_1)$ dans $(G_2, *_2)$.

1. Soit $H_2 \subset G_2$. Définir « H_2 est un sous-groupe de G_2 ».

2. Soit H_1 un sous-groupe de G_1. Montrer que $f[H_1]$ est un sous-groupe de G_2.

3. Montrer que $\left(\{-1, 1\}, \times\right)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}^*$ à l'aide de la question précédente.

QCOP GRP.4

Soient $(G_1, *_1)$, $(G_2, *_2)$ deux groupes. Soit f un morphisme de $(G_1, *_1)$ dans $(G_2, *_2)$.

1. Énoncer et démontrer une condition nécessaire et suffisante d'injectivité de f.

2.
- **a)** Montrer que

$$f \text{ est un morphisme de } (\mathbb{Z}, +) \text{ dans } (\mathbb{Z}, +) \iff \left[\forall n \in \mathbb{Z},\; f(n) = n\, f(1)\right].$$

- **b)** Quels sont les morphismes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$ injectifs ?