Intégration sur un segment

Propriétés de l'intégrale

QCOP INTS.1

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.
Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

1. Rappeler les propriétés de « croissance » et de « linéarité » de l'intégrale.
2. Montrer que :
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left|f(t)\right|\mathrm{d}t.$$
3. On suppose f continue. Montrer que :
$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant |b-a| \sup_{t\in[a,b]} \left|f(t)\right|.$$

QCOP INTS.2 ★

Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$.

1. Rappeler l'inégalité triangulaire intégrale pour une fonction réelle.
2. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux, à valeurs complexes.
   a) Justifier l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :
$$e^{i\theta} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}.$$
   b) Montrer que l'inégalité triangulaire intégrale est vraie pour des fonctions à valeurs complexes.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+it}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Théorème fondamental de l'analyse

QCOP INTS.3

Soit I un intervalle (non vide et non réduit à un point) de $\mathbb{R}$.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. On note $F_{x_0} : x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque cela a un sens.

1. Si f est continue par morceaux sur I, que dire de la régularité de F_{x_0} ?
2. Soit $a \in I$. On suppose f continue en a.
   Montrer que F_{x_0} est dérivable en a et que ${F_{x_0}}'(a) = f(a)$.
3. Montrer que :
$$\left.\begin{array}{l} f \text{ continue sur } I \\ \forall (a,b) \in I^2,\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{array}\right\} \implies f = 0 \text{ sur } I.$$

QCOP INTS.4

1. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue 2π-périodique.
   À l'aide de $x \longmapsto \int_x^{x+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$, montrer que :
   $$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

QCOP INTS.5

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

1. Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
2. Compléter et démontrer :
   $$\left.\begin{array}{l} f \text{ est ... sur } [a,b] \\ f \text{ est de signe ... sur } [a,b] \\ \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad f = 0 \text{ sur } [a,b],$$
   en étudiant la monotonie d'une fonction bien choisie.
3. On suppose f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Montrer que :
   $$\left|f(a)\right| + \sup_{t\in[a,b]} \left|f'(t)\right| = 0 \quad \Longrightarrow \quad f = 0 \text{ sur } [a,b].$$

Sommes de Riemann

QCOP INTS.6

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
   Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ lipschitzienne.
   On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\mathrm{I}_n(f) := \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$
   Montrer que :
   $$\mathrm{I}_n(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$
2. Montrer que :
   $$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \longrightarrow \frac{2}{\pi}.$$

QCOP INTS.7 ★

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
   Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.
   On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$\mathrm{I}_n(f) := \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$
   a) Montrer que $\mathrm{I}_n(f) \longrightarrow \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
   b) Faire un dessin.
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \longrightarrow \ln(2)$.
3. Déterminer la limite lorsque $n \to +\infty$ de :
   $$\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n^{\frac{3}{2}}}.$$