Limites et comparaisons

QCOP LIM.1

1. Compléter les équivalents suivants :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} \cdots, \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \cdots,$$
$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \cdots, \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \cdots$$
$$(\text{où } \alpha \in \mathbb{R}^*).$$

2. Soient f, g deux fonctions réelles définies sur un voisinage de 0.
Écrire, à l'aide d'un $\underset{x\to 0}{o}(\cdot)$, que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} g(x)$.

3. Donner un développement asymptotique à l'ordre 1 au voisinage de 0 des fonctions

$$x \longmapsto \exp(x), \quad x \longmapsto \ln(1+x),$$
$$x \longmapsto \frac{1}{1+x}, \quad x \longmapsto \sqrt{1+x}.$$

QCOP LIM.2

1. Soit f une fonction réelle dérivable au voisinage de 0. Rappeler la définition du nombre $f'(0)$.

2. Compléter et démontrer, à l'aide de taux d'accroissements, les équivalents suivants :

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} \cdots, \quad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \cdots,$$
$$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \cdots, \quad (1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \cdots$$
$$(\text{où } \alpha \in \mathbb{R}^*).$$

3. Déterminer les limites suivantes :

$$\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \cdots, \quad \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \cdots,$$
$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \cdots, \quad \frac{\ln(t)}{t-1} \xrightarrow[t\to 1]{} \cdots.$$

QCOP LIM.3

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Donner les définitions de :

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell, \quad f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} \ell$$
$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty, \quad f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty.$$

2. Soit $F : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)\,dt$. Montrer que :

$$f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} \ell \quad \Longrightarrow \quad F(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} \ell.$$

Indication. On pourra utiliser l'inégalité triangulaire intégrale.