Matrices et applications linéaires

Similitude matricielle, rang d'une matrice

QCOP MATAL.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Donner la définition de « A et B sont semblables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ».
2. Montrer que :
$$B = \mathrm{I}_n \iff A = \mathrm{I}_n.$$
3. Montrer que deux matrices de même rang ne sont pas nécessairement semblables.

QCOP MATAL.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Donner la définition de « A et B sont semblables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ».
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que A^k et B^k sont semblables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, \dots, a_k \in \mathbb{K}$.
Pour $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, on pose :
$$Q(M) := \sum_{j=0}^{k} a_j M^j.$$
Montrer que les matrices $Q(A)$ et $Q(B)$ sont semblables.

QCOP MATAL.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Que dire de A^k et B^k ?
2. Montrer que :
$$\left.\begin{array}{l} \exists k_A \in \mathbb{N}^* : A^{k_A} = 0_n \\ B \text{ est diagonale} \end{array}\right\} \implies B = 0_n.$$
3. On se place dans le cas $n = 2$. On suppose que $A \neq 0_2$ et $A^2 = 0_2$.
   a) Soit $X \in \mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{K}) \setminus \mathrm{Ker}(A)$.
   Montrer que la famille (AX, X) est libre dans $\mathrm{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.
   b) En déduire que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

QCOP MATAL.4 ★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Définir le rang de A.
2. On suppose que $\mathrm{rg}(A) = 1$.
   a) Montrer qu'il existe $C \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $L \in \mathrm{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ tels que $A = CL$.
   b) Montrer que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.
   c) En déduire, pour $p \in \mathbb{N}$, A^p.

Représentation matricielle

QCOP MATAL.5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit p un projecteur de E.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$.
2. Déterminer une base dans laquelle la matrice de p est diagonale.
3. Montrer que $\mathrm{Tr}(p) = \mathrm{rg}(p)$.

QCOP MATAL.6 ★

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Soit $r \in [\![1, \min(n, p)]\!]$.
Soit $A \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang r.

1. Définir la matrice usuellement appelée J_r et écrire la définition de « A et J_r sont équivalentes ».
2. Montrer que A et J_r sont équivalentes.
3. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$.
4. Montrer que deux matrices de même rang sont équivalentes.

QCOP MATAL.7

1. a) Montrer que deux matrices semblables ont même trace.
   b) Comment définir la trace d'un endomorphisme ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On considère l'endomorphisme :
   $$\mathrm{D} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \\ P & \longmapsto & P'. \end{array} \right.$$
   a) Écrire la matrice de D dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.
   b) Déterminer la trace de D.

QCOP MATAL.8 ★

1. Définir la notion de matrice d'une application linéaire.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Écrire la matrice de l'endomorphisme :
   $$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[\mathrm{X}] \\ P & \longmapsto & P(\mathrm{X}+1) \end{array} \right.$$
   dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.
   b) Déterminer l'inverse de φ.
   c) En déduire l'inverse de la matrice :
   $$M := \left(\binom{i}{j} \right)_{0 \leqslant i,j \leqslant n}.$$