Matrices

On désignera par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Trace

QCOP MAT.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B, C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Définir $\mathrm{Tr}(A)$.

2. Montrer que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

3. **a)** Montrer que :
$$\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA) = \mathrm{Tr}(CAB).$$
b) A-t-on $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(CBA)$?

c) Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :
$$A = PBP^{-1}.$$
Déterminer $\mathrm{Tr}(B)$.

QCOP MAT.2 ★

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. **a)** Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.
Donner l'expression du coefficient d'indice (i, j) de $M^\top M$.

b) Montrer que :
$$\mathrm{Tr}(M^\top M) = 0 \iff M = 0_n.$$

2. Le résultat est-il vrai si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$?

3. Quel résultat pourrait-on énoncer et démontrer si $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$?

Matrices symétriques et antisymétriques

QCOP MAT.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Définir les espaces $\mathrm{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{A}_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer :
$$\left(M + M^\top\right)^\top \quad \text{et} \quad \left(M - M^\top\right)^\top.$$

3. **a)** Montrer que toute matrice est somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

b) Montrer que :
$$\mathrm{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathrm{A}_n(\mathbb{K}) = \{0_n\}.$$

QCOP MAT.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Donner l'expression du coefficient d'indice (i, j) de la matrice AB.

2. Montrer que :
$$(AB)^\top = B^\top A^\top.$$

3. On suppose que $A, B \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$.

a) A-t-on $AB \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$?

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $AB \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K})$.

Inversibilité, opérations élémentaires

QCOP MAT.5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

1. Définir « $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ».

2. Montrer que :

$$A^\top \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad \left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top.$$

3. Montrer que :

$$A \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K}) \iff A^{-1} \in \mathrm{S}_n(\mathbb{K}).$$

QCOP MAT.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Soit $X \in \mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Calculer AX.

2. Montrer que :

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \implies \mathrm{Ker}(A) = \left\{0_{n,1}\right\}.$$

On admettra la réciproque.

3. On suppose que A est diagonale.

a) Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ si, et seulement si, tous ses coefficients sont non nuls.

b) Donner, dans ce cas, A^{-1}.

QCOP MAT.7 ★

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Donner la définition de « A est inversible dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ ».

2. Soit $p \in \mathbb{N}$. Soient $a_0, \ldots, a_p \in \mathbb{K}$.

On pose :

$$P := \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \quad \text{et} \quad P(A) := \sum_{k=0}^{p} a_k A^k.$$

On suppose que 0 n'est pas racine de P.

a) Que dire du coefficient a_0 ?

b) On suppose que $P(A) = 0_n$.

Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et déterminer A^{-1}.

QCOP MAT.8 ★

1. Définir les matrices d'opérations élémentaires : matrice de transvection, de dilatation et d'échange.

2. a) Compléter :

multiplier à ... par une matrice d'opération élémentaire	opération sur les ...
droite	...
gauche	...

b) Décrire les opérations réalisables sur une matrice M par produit de M par une matrice d'opération élémentaire.

3. Quels liens peut-on faire entre opérations élémentaires et inversibilité d'une matrice ?