Polynômes

On désignera par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

QCOP POL.1

1. Comment établir la nullité d'un polynôme ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrire le polynôme $X^n - 1$ sous forme scindée.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\prod_{k=1}^{n}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k.$$

QCOP POL.2

1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Donner, pour $k \in \mathbb{N}$, l'expression du coefficient de degré k du produit PQ.
2. Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$.
   a) Donner une expression du coefficient de degré p de $(X+1)^{n+m}$.
   b) En donner une autre en développant $(X+1)^n \times (X+1)^m$.
   c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$.

QCOP POL.3

1. Énoncer le théorème de division euclidienne polynomiale.
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer, à l'aide de la division euclidienne, que :
$$\alpha \text{ est racine de } P \iff (X-\alpha) \mid P.$$
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que :
$$\alpha \text{ est racine de } P \iff \overline{\alpha} \text{ est racine de } P.$$

QCOP POL.4

1. Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Compléter :
$$P^n - Q^n = \ldots \sum_{k=\ldots}^{\ldots} \ldots.$$
2. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Montrer, à l'aide de la formule précédente, que :
$$\alpha \text{ est racine de } P \iff (X-\alpha) \mid P.$$
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\prod_{k=1}^{n}\left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = (X-1)\sum_{k=0}^{n-1} X^k.$$