Probabilités

QCOP PROB.1

Soient A et B deux événements.

1. Définir l'indépendance de A et B.

2. Si $\mathbb{P}(B) > 0$, que vaut $\mathbb{P}_B(A)$?

3. On suppose A et B indépendants.
Montrer que :

- **a)** $\overline{A}$ et B sont indépendants ;
- **b)** $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

QCOP PROB.2

1. Définir l'indépendance mutuelle d'une famille d'événements.

2. Montrer que l'indépendance mutuelle implique la dépendance deux à deux.

3. À l'aide d'un contre exemple, vérifier que l'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance mutuelle.

QCOP PROB.3

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A_1, \ldots, A_p)$ un système complet d'événements, dont aucun n'est négligeable.

1. Définir « $(A_1, \ldots, A_p)$ un système complet d'événements ».

2. Soit B un événement.

- **a)** Montrer que $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \cdots + \mathbb{P}(B \cap A_p)$.
- **b)** Comment appelle-t-on usuellement cette formule ?
- **c)** Écrire $\mathbb{P}(B)$ à l'aide de $\mathbb{P}(A_1)$, ..., $\mathbb{P}(A_p)$ et de probabilités conditionnelles.

3. Soit $(B_n)_n$ une suite d'événements non négligeables.
Écrire, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(B_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(B_n)$ et de probabilités conditionnelles.

QCOP PROB.4

Soient A et B deux événements avec $\mathbb{P}(B) > 0$.

1. Définir la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_B(A)$.

2. Montrer que $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_A(B) \dfrac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$.

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A_k)_{1 \leqslant k \leqslant p}$ un système complet d'événements de probabilités non nulles.
Montrer que :

$$\forall j \in [\![1, p]\!], \quad \mathbb{P}_B(A_j) = \frac{\mathbb{P}(A_j)\mathbb{P}_{A_j}(B)}{\sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}_{A_k}(B)}.$$