Nombres réels

Partie entière

QCOP REEL.1

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. a) Définir le nombre $\lfloor x \rfloor$.
   b) Donner un encadrement de x par $\lfloor x \rfloor$.
   c) En déduire que :
   $$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
   $$\lfloor 3^n x \rfloor - 3\lfloor 3^{n-1} x \rfloor \in \{0, 1, 2\}.$$

QCOP REEL.2

Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Donner un encadrement de x par $\lfloor x \rfloor$.
2. a) On suppose que $\lfloor x \rfloor > \lfloor y \rfloor$.
   Montrer que :
   $$x \geqslant \lfloor x \rfloor \geqslant \lfloor y \rfloor + 1 > y.$$
   b) En raisonnant par contraposée, en déduire que $\lfloor \cdot \rfloor$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\lfloor \cdot \rfloor$ n'est pas strictement croissante.
4. On suppose que $y \in \mathbb{Z}$ et $x < y$.
   Comparer $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor y \rfloor$.

Densité

QCOP REEL.3

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Qu'est-ce qu'une approximation décimale de x à 10^{-n} près ?
2. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Définir « A est dense dans $\mathbb{R}$ ».
3. a) Montrer que :
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad 10^{-N_\varepsilon} \leqslant \varepsilon.$$
   b) Montrer que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

QCOP REEL.4

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Définir « A est dense dans $\mathbb{R}$ ».
2. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) A est dense dans $\mathbb{R}$;
   (ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y \implies \exists a \in A : x \leqslant a \leqslant y$;
   (iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x < y \implies \exists a \in A : x < a < y$.
3. a) Soit $a \in \mathbb{Q}$. Soit $b \notin \mathbb{Q}$.
   Que dire de $a + b$?
   b) Montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.