Relations binaires

QCOP RELB.1

1. Définir la notion de relation d'équivalence, en explicitant chaque terme.

2. On considère la relation $\mathscr{R}$ de divisibilité sur $\mathbb{N}$:

$$\forall a, b \in \mathbb{N}, \quad a \mathscr{R} b \iff \exists k \in \mathbb{N} : b = ka.$$

a) Montrer que $\mathscr{R}$ est réflexive et transitive.

b) La relation $\mathscr{R}$ est-elle une relation d'équivalence ?

QCOP RELB.2

Soit E un ensemble. Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E.

1. Définir la classe d'équivalence de $a \in E$ pour $\mathscr{R}$, notée $c\ell_{\mathscr{R}}(a)$.

2. Montrer que $\left\{c\ell_{\mathscr{R}}(a) \;;\; a \in E\right\}$ forme une partition de E.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Justifier que la congruence modulo n est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

b) En déduire une partition de $\mathbb{Z}$.

QCOP RELB.3

Soit E un ensemble. Soit $\preccurlyeq$ une relation d'ordre sur E.

1. Définir « $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E » et « $(E, \preccurlyeq)$ est totalement ordonné ».

2. Donner des exemples d'ensembles ordonnés. Lesquels sont totalement ordonnés ?
On s'intéressera par exemple à $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.