Séries numériques

On désignera par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Premiers résultats

QCOP SER.1

Soit $(u_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1. Donner la définition de « la série $\sum_n u_n$ est convergente ».
2. Montrer que :
$$\sum_n u_n \text{ converge} \quad \Longrightarrow \quad u_n \longrightarrow 0.$$
3. Étudier la nature des séries suivantes :
$$\sum_{n\geqslant 0} \arctan(12n!) \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

QCOP SER.2

Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels positifs.

On pose, pour $N \in \mathbb{N}$, $U_N := \sum_{n=0}^{N} u_n$.

1. Quelle est la monotonie de $(U_N)_N$?
2. Montrer que :
$$\sum_n u_n \text{ converge} \iff (U_N)_N \text{ est majorée.}$$
3. Ceci reste-il vrai si l'on ne suppose plus que $(u_n)_n$ est à valeurs positives ?

Deux séries de référence

QCOP SER.3

Soit $a \in \mathbb{C}$.

1. Compléter :
$$a^n \longrightarrow 0 \quad \iff \quad \dots .$$
2. Soit $N \in \mathbb{N}$. Rappeler l'expression de $\sum_{k=0}^{N} a^k$ pour $a \neq 1$.
3. Montrer que :
$$\sum_n a^n \text{ converge} \quad \iff \quad |a| < 1.$$
4. On suppose que $|a| < 1$. Déterminer :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a^n.$$

QCOP SER.4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :
$$\sum_{k=0}^{n} (u_{k+1} - u_k).$$
   b) En déduire que $\sum_n (u_{n+1} - u_n)$ converge si, et seulement si, $(u_n)_n$ converge.
2. On suppose que $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$. Montrer que la série
$$\sum_n (u_{n+2} - 2\,u_{n+1} + u_n)$$
converge.

Théorèmes de comparaison

QCOP SER.5

Soit $N_0 \in \mathbb{N}$. Soient $(a_n)_{n\geqslant N_0}, (b_n)_{n\geqslant N_0}$ deux suites de nombres réels positifs.
On pose, pour $N \geqslant N_0$,

$$A_N := \sum_{n=N_0}^{N} a_n \text{ et } B_N := \sum_{n=N_0}^{N} b_n.$$

1. Compléter :
$$\sum_{n\geqslant N_0} a_n \text{ converge} \iff (A_N)_{N\geqslant N_0} \dots.$$
2. On suppose que :
$$\begin{cases} \exists N_1 \geqslant N_0 : \ \forall n \geqslant N_1, \ a_n \leqslant b_n \\ \displaystyle\sum_{n\geqslant N_0} b_n \text{ converge.} \end{cases}$$
   a) Montrer que $(A_N)_{N\geqslant N_0}$ est majorée.
   b) En déduire que $\sum_{n\geqslant N_0} a_n$ converge.
   c) Montrer que $\sum_{n=N_1}^{+\infty} a_n \leqslant \sum_{n=N_1}^{+\infty} b_n$.

QCOP SER.6

Soient $(a_n)_n, (b_n)_n$ deux suites de nombres réels positifs telles que
$$a_n \sim b_n.$$

1. Rappeler la règle de comparaison pour les séries à termes positifs.
2. Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que
$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geqslant N_1, \ \frac{1}{2}b_n \leqslant a_n \leqslant \frac{3}{2}b_n.$$
3. Montrer que $\sum_n a_n$ et $\sum_n b_n$ sont de même nature.
4. Ce résultat reste-il valable si l'on ne suppose plus $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ à valeurs positives ?

QCOP SER.7

1. Énoncer la règle de comparaison pour les séries à termes positifs.
2. Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Montrer que :
$$\left.\begin{array}{l} u_n = o(v_n) \\ \displaystyle\sum_n |v_n| \text{ converge} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_n |u_n| \text{ converge.}$$
3. Soit $\sum_n u_n$ une série numérique.
Montrer que :
$$n^2 u_n \longrightarrow 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_n u_n \text{ converge.}$$

QCOP SER.8

1. Énoncer la règle de comparaison pour les séries à termes positifs.
2. Soient $(u_n)_n, (v_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
Montrer que :
$$\left.\begin{array}{l} u_n = O(v_n) \\ \displaystyle\sum_n |v_n| \text{ converge} \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum_n |u_n| \text{ converge.}$$
3. Soit $\sum_n u_n$ une série numérique telle que $(n^2 u_n)_n$ est bornée.
Montrer que $\sum_n u_n$ converge.

Comparaison série-intégrale

QCOP SER.9

1. Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante.
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \geqslant n$.
Montrer que :

$$\int_n^m f(t)\,\mathrm{d}t + f(m) \leqslant \sum_{k=n}^{m} f(k) \leqslant f(n) + \int_n^m f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{H}_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a) Montrer que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.

b) Montrer que $\mathrm{H}_n \sim \ln(n)$.

QCOP SER.10

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que $\alpha \leqslant 0$. Montrer que $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

2. On suppose que $\alpha > 0$.

a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\mathrm{I}_N + \frac{1}{N^\alpha} \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leqslant 1 + \mathrm{I}_N,$$

où $\mathrm{I}_N := \int_1^N \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$.
On n'utilisera pas une « formule toute faite » de comparaison série-intégrale mais on l'établira dans ce cas particulier.

b) En déduire la nature de $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ en distinguant les cas :

$$\alpha \in]0, 1[, \quad \alpha = 1, \quad \text{et} \quad \alpha > 1.$$

Convergence absolue

QCOP SER.11

Soit $\sum_n u_n$ une série numérique.

1. Définir « $\sum_n u_n$ est absolument convergente ».
2. Montrer que, si $\sum_n u_n$ est absolument convergente, alors $\sum_n u_n$ est convergente.
   On fera d'abord la preuve dans le cas où $(u_n)_n$ est à valeurs réelles, puis on utilisera le résultat établi pour en déduire le cas où $(u_n)_n$ est à valeurs complexes.
3. Montrer que la réciproque est fausse en général.
4. Écrire la contraposée du résultat démontré.

Séries alternées

QCOP SER.12 ★

Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels positifs, décroissante et de limite nulle.

On pose, pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N := \sum_{n=0}^{N} (-1)^n a_n$.

1. **a)** Montrer que $(S_{2N})_N$ et $(S_{2N+1})_N$ sont adjacentes.
   b) Compléter :
$$\begin{cases} \sum_n (-1)^n a_n \ \dots \\ \forall N \in \mathbb{N}, \quad \dots \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \leqslant \dots . \end{cases}$$
   c) En déduire que $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n \right| \leqslant a_0$.
2. On suppose que $\sum_n (-1)^n a_n$ est convergente. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k a_k \right| \leqslant a_{n+1}.$$