Suites numériques

On désignera par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Convergence

QCOP SUIT.1

Soient $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ trois suites réelles.
Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Définir « $(a_n)_n$ converge vers ℓ ».
2. On suppose que :
$$\exists N_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N_0, \quad a_n \leqslant b_n \leqslant c_n.$$
Montrer que :
$$\left.\begin{array}{l} a_n \longrightarrow \ell \\ c_n \longrightarrow \ell \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad b_n \longrightarrow \ell.$$
3. On suppose que $a_n \longrightarrow \ell$ et $\ell > 0$.
Que dire de $(a_n)_n$?
4. On suppose que $(a_n)_n$ est bornée et que $b_n \longrightarrow 0$. Que dire de la suite $(a_n b_n)_n$?

QCOP SUIT.2

Soient $(a_n)_n, (b_n)_n$ deux suites réelles.
Soient $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler le théorème d'encadrement pour les suites réelles.
2. On suppose que $a_n \longrightarrow \ell$ et $\ell > 0$.
Montrer que :
$$\exists N_1 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N_1, \quad a_n > 0.$$
3. On suppose que $a_n \longrightarrow \ell$ et, à partir d'un certain rang, $a_n \geqslant 0$. Que dire de ℓ ?
4. On suppose que :
$$\begin{cases} a_n \longrightarrow \ell \\ b_n \longrightarrow \ell' \\ \exists N_1 \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geqslant N_1, \quad a_n \leqslant b_n. \end{cases}$$
Comparer ℓ et ℓ'.

QCOP SUIT.3

Soit $(u_n)_n$ une suite convergente.

1. Que dire de la suite $(u_{n+1})_n$?
2. Montrer que $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
3. Donner deux exemples de suites $(u_n)_n$ non convergentes, telles que $u_{n+1} - u_n \longrightarrow 0$. Justifier.

QCOP SUIT.4 ★

1. Soit $(a_n)_n$ une suite réelle croissante et bornée.
   a) Justifier l'existence de $\ell := \sup\limits_n a_n$.
   b) Montrer que :
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \ell - \varepsilon < a_{N_\varepsilon} \leqslant \ell.$$
   c) Montrer que $a_n \longrightarrow \ell$.
2. Décrire les alternatives pour la convergence d'une suite monotone.

QCOP SUIT.5

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. Soit $\ell \in \mathbb{C}$.

1. Donner la définition de « la suite $(u_n)_n$ converge vers ℓ ».
2. Montrer que :
$$u_n \longrightarrow \ell \quad \Longrightarrow \quad |u_n| \longrightarrow |\ell|.$$
3. Montrer que :
$$u_n \longrightarrow \ell \quad \Longleftrightarrow \quad \Big[\mathfrak{Re}(u_n) \longrightarrow \mathfrak{Re}(\ell) \text{ et } \mathfrak{Im}(u_n) \longrightarrow \mathfrak{Im}(\ell)\Big].$$
4. Soit $\alpha > 0$. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On admet que $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}\right)_{N \geqslant 1}$ converge.

   Montrer que $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\cos(n\theta)}{n^\alpha}\right)_{N \geqslant 1}$ et $\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha}\right)_{N \geqslant 1}$ convergent.

Suites extraites

QCOP SUIT.6

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. Soit $\ell \in \mathbb{K}$.

1. Qu'est-ce qu'une suite extraite de $(u_n)_n$?
2. Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une extractrice.
   a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geqslant n.$$
   b) Montrer que :
   $$u_n \longrightarrow \ell \quad \Longrightarrow \quad u_{\varphi(n)} \longrightarrow \ell.$$
3. Montrer que $\big((-1)^n\big)_n$ diverge.
4. Montrer que :
$$u_{n+1} \longrightarrow \ell \quad \Longrightarrow \quad u_n \longrightarrow \ell.$$

QCOP SUIT.7 ★

1. Soient $(a_n)_n, (b_n)_n$ deux suites réelles. Définir « $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont adjacentes ».
2. Soient $(u_n)_n \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{K}$. Montrer que :
$$\left.\begin{array}{l} u_{2p} \longrightarrow \ell \\ u_{2p+1} \longrightarrow \ell \end{array}\right\} \quad \Longleftrightarrow \quad u_n \longrightarrow \ell.$$
3. Soit $(a_n)_n$ une suite réelle positive, décroissante et convergeant vers 0.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$.

   a) Montrer que $(S_{2p})_p$ et $(S_{2p+1})_p$ sont adjacentes.
   b) En déduire que $(S_n)_n$ converge.

QCOP SUIT.8 ★

1. Énoncer le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites numériques.
2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit $(x_n)_n \in [a, b]^\mathbb{N}$.
   a) Par récurrence, construire deux suites réelles $(a_n)_n$ croissante et $(b_n)_n$ décroissante telles que $b_n - a_n \longrightarrow 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $[a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de $(x_k)_k$.
   b) En déduire le théorème de Bolzano-Weierstrass pour les suites réelles.
3. Que dire d'une suite réelle à valeurs dans un segment ?

Formes indéterminées

QCOP SUIT.9

1. Soit $a > 0$.

   a) Justifier l'existence et calculer, à l'aide d'un taux d'accroissement, la limite
   $$\lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+at)}{t}.$$

   b) En déduire que :
   $$n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) \longrightarrow a.$$

   c) En déduire que
   $$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \longrightarrow \mathrm{e}^a.$$

2. Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $u_n \longrightarrow 1$.
   Que peut-on dire de la nature de $({u_n}^n)_n$?

Densité, borne supérieure

QCOP SUIT.10

1. Soit $A \subset \mathbb{R}$. Rappeler la définition de « A est dense dans $\mathbb{R}$ ».

2. Énoncer et démontrer le théorème de caractérisation séquentielle de la densité.

3. a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Encadrer $\lfloor 10^n x \rfloor$.

   b) Montrer que $\mathbb{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

QCOP SUIT.11 ★

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée.

   a) Montrer que :
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x_\varepsilon \in A : \quad \sup(A) - \varepsilon < x_\varepsilon \leqslant \sup(A).$$

   b) En déduire qu'il existe une suite $(x_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $\sup(A)$.

2. On définit la partie
   $$A := \left\{ (-1)^n + \frac{1}{n+1} \;;\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$
   Montrer que A est bornée et déterminer $\sup(A)$ et $\inf(A)$.