Techniques algébriques

Coefficients binomiaux

QCOP TALG.1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $k \in [\![1, n-1]\!]$.

1. Énoncer et démontrer de manière combinatoire une formule liant $\binom{n}{k}$ et $\binom{n-1}{k-1}$.
2. Exprimer $\binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}$.
3. Retrouver ces résultats à l'aide de l'expression de $\binom{n}{k}$ à l'aide de factorielles.

QCOP TALG.2

1. Définir $\binom{n}{k}$ pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$.
2. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.
3. Soient E et F deux ensembles finis.
   a) Calculer $\operatorname{Card}\big(\mathscr{P}(E)\big)$.
   b) Calculer $\operatorname{Card}\big(\mathscr{P}(E \times F)\big)$.

QCOP TALG.3

1. Donner la relation de Pascal.
2. Démontrer par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, n]\!],\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$
3. En pratique, comment calcule-t-on $\binom{n}{k}$?

QCOP TALG.4 ★

1. Énoncer et démontrer de manière combinatoire la formule du triangle de Pascal pour les coefficients binomiaux.
2. Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On considère $S_p(n) := \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{p}$.
   a) Représenter les termes de $S_p(n)$ sur le triangle de Pascal.
   b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\binom{p+k+1}{p+1} - \binom{p+k}{p+1}$.
   c) Calculer $S_p(n)$.

Sommes usuelles

QCOP TALG.5

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de premier terme $a \in \mathbb{C}$ et de raison $r \in \mathbb{C}$.

1. Définir $(u_n)_n$ par récurrence et exprimer explicitement, pour $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n.

2. **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une expression simplifiée de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

b) Soient $N_0, N_1 \in \mathbb{N}$ avec $N_0 \leqslant N_1$. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=N_0}^{N_1} u_k$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Retrouver, à l'aide de ce qui précède, les valeurs de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k$.

QCOP TALG.6

1. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Soient $N_0, N_1 \in \mathbb{N}$ avec $N_1 \geqslant N_0$.

Exprimer $\displaystyle\sum_{k=N_0}^{N_1} a^k$ comme un quotient faisant intervenir des puissances de a.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a^k \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a^k$$

dans les cas $a \in [0, 1[$, $a = 1$ et $a > 1$.

Indication. On pourra utiliser tous les résultats de Terminale sur les suites géométriques.

QCOP TALG.7 ★

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Compléter et démontrer : $a^n - b^n = \cdots \displaystyle\sum_{k=\ldots}^{\ldots} \cdots$.

2. Soient $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. On définit la fonction $P : x \longmapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$.

Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $P(c) = 0$.

Montrer que :

$$\exists b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R} : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x - c)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2).$$