Formules de Taylor

QCOP TAYL.1

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :
   $$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leqslant \max(e^x, 1) \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$
   b) En déduire que :
   $$e^x = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}.$$

QCOP TAYL.2

1. Énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   a) Montrer que :
   $$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x e^t \frac{(x-t)^n}{n!} \, dt.$$
   b) En déduire que :
   $$e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

QCOP TAYL.3

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Taylor-Lagrange.
2. Soit $x \in \left]-1, 1\right[$.
   a) Montrer que $\ln(1+x) = \lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$.
   b) Comment calculer les valeurs de $\ln(1-x)$ et $\ln(1+x^2)$?

QCOP TAYL.4

1. Énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral.
2. Soit $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer que :
   $$\forall x \geqslant 0, \quad g(x) = g(1) + g'(1)(x-1) + (x-1)^2 \int_0^1 g''\big(1 + (x-1)u\big)(1-u) \, du.$$

QCOP TAYL.5 ★

1. Énoncer et démontrer la formule de Taylor pour les polynômes.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que :
   $$\left[\exists Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X] : \begin{cases} Q(a) \neq 0 \\ P = (X-a)^2 Q \end{cases} \right] \iff \begin{cases} P(a) = P'(a) = 0 \\ P''(a) \neq 0. \end{cases}$$