Trigonométrie et nombres complexes

Une transformation

QCOP TRGCPLX.1

1. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\begin{cases} \mathfrak{Re}(zz') = \mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Re}(z') - \mathfrak{Im}(z)\mathfrak{Im}(z') \\ \mathfrak{Im}(zz') = \mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Im}(z') + \mathfrak{Im}(z)\mathfrak{Re}(z'). \end{cases}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   a) Calculer
   $$\mathfrak{Re}\Big((1-\mathrm{i})\big(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)\big)\Big).$$

   b) En déduire que
   $$\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Factorisation par l'angle moitié

QCOP TRGCPLX.2

1. Définir l'ensemble $\mathbb{U}$ et en donner une description.
2. Montrer les formules d'Euler exprimant $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
3. Soient $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$. Factoriser
$$1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad 1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},$$
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_1} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_2}.$$

QCOP TRGCPLX.3

1. Définir, pour $\theta \in \mathbb{R}$, le nombre $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \neq 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   a) Factoriser $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}$.

   b) Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$.

3. En déduire, pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, les valeurs des sommes
$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta).$$

Délinéarisation

QCOP TRGCPLX.4 ★

1. Énoncer et démontrer la formule de Moivre.

2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\begin{cases} \cos(n\theta) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p \sin^{2p}(\theta) \cos^{n-2p}(\theta) \\ \sin(n\theta) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2p+1} \sin^{2p+1}(\theta) \cos^{n-1-2p}(\theta). \end{cases}$$

b) Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de puissances de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
On n'appliquera pas directement les formules précédentes mais on s'inspirera de la méthode de leur démonstration.