Fonctions trigonométriques réciproques

Autour de arccos(·), arcsin(·) et arctan(·)

QCOP TRGREC.1

1. Définir les fonctions arccos(·) et arcsin(·).
2. Soient $A, B, \omega \in \mathbb{R}$. On définit
$$y : t \longmapsto A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t).$$
   a) Calculer, pour $t \in \mathbb{R}$, $y''(t) + \omega^2 y(t)$.
   b) Déterminer $K, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = K\cos(\omega t + \varphi).$$

QCOP TRGREC.2 ★

1. Donner les graphes des fonctions arcsin(·) et arccos(·).
2. Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer que
$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2},$$
sans utiliser la dérivation.
3. Montrer que arcsin(·) est impaire.
4. Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer que
$$\arccos(x) + \arccos(-x) = \pi.$$

QCOP TRGREC.3 ★

1. Définir les fonctions tan(·) et arctan(·) et donner leur courbe représentative.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ que l'on écrit $z = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.
On note θ l'argument principal de z.
   a) Déterminer θ lorsque $a = 0$.
   b) Montrer que, si $a > 0$,
$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$
   c) Montrer que, si $a < 0$,
$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{si} \quad b > 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{si} \quad b \leqslant 0 \end{cases}$$

QCOP TRGREC.4

1. Soient $x, \theta \in \mathbb{R}$. Compléter :
$$\theta = \arctan(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \theta \in \dots \\ x = \dots . \end{cases}$$
2. Donner le domaine de définition de la fonction tan(·).
3. Rappeler l'expression de $\tan(a + b)$ pour $a, b \in \mathbb{R}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
   a) Montrer que $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de tangente.
   b) En déduire que
$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{signe}(x)\frac{\pi}{2}.$$

Utilisation de la dérivée de la réciproque

QCOP TRGREC.5

1. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection dérivable. Soit $y \in J$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f^{-1} soit dérivable en y.

b) Donner, dans ce cas, l'expression de $\left(f^{-1}\right)'(y)$.

2. Montrer que

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \cos\bigl(\arcsin(x)\bigr) = \sqrt{1 - x^2}.$$

3. Montrer que $\arcsin(\cdot)$ est dérivable sur $]-1, 1[$ et que

$$\forall x \in\ ]-1, 1[, \quad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

à l'aide de la formule de la dérivée de la bijection réciproque.

QCOP TRGREC.6

1. Définir la fonction $\arctan(\cdot)$.

2. Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow J$ une bijection dérivable. Soit $y \in J$. Montrer que

$$f^{-1} \text{ est dérivable en } y \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f'\bigl(f^{-1}(y)\bigr) \neq 0 \\ \left(f^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{f'\bigl(f^{-1}(y)\bigr)} \end{cases}.$$

3. Montrer que $\arctan(\cdot)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$