Variables aléatoires finies

Dans toute la fiche, $\big(\Omega, \mathbb{P}(\cdot)\big)$ désigne un espace probabilisé fini.

Lois usuelles

QCOP VAF.1

Compléter le tableau suivant.

	support $X[\Omega]$	$\mathbb{P}(X=k),\ k \in X[\Omega]$	espérance $\mathbb{E}[X]$	variance $\mathbb{V}[X]$
$X \sim \mathscr{U}\big([\![a,b]\!]\big)$ $a, b \in \mathbb{N}$				
$X \sim \mathscr{B}(p)$ $p \in [0,1]$				
$X \sim \mathscr{B}(n,p)$ $n \in \mathbb{N},\ p \in [0,1]$				

On détaillera les calculs des espérances et des variances.

Espérance, variance, covariance

QCOP VAF.2

Soit X une variable aléatoire réelle.

1. Définir l'espérance de X, notée $\mathbb{E}[X]$.

Les questions qui suivent sont indépendantes.

2. **a)** Énoncer le théorème de transfert et la formule de transfert.

b) En déduire une formule de calcul de $\mathbb{E}[X^2]$.

3. Soit Y une variable aléatoire indépendante de X. Que vaut $\mathbb{E}[XY]$?

4. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $X[\Omega] \subset [\![0, N]\!]$.

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X \geqslant k) - \mathbb{P}(X \geqslant k+1)$.

b) En déduire que $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \mathbb{P}(X \geqslant k)$.

QCOP VAF.3

Soit X une variable aléatoire réelle.

1. Définir la variance de X, notée $\mathbb{V}[X]$, à l'aide d'une espérance.
2. Montrer que :
$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$
3. On suppose que $X[\Omega] = \{0, 1\}$.
Déterminer $\mathbb{V}[X]$.

QCOP VAF.4

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.

1. Définir la covariance de X et Y, notée $\mathrm{Cov}(X, Y)$.
2. À l'aide de $\lambda \mapsto \mathbb{V}[\lambda X + Y]$, montrer que :
$$\left|\mathrm{Cov}(X, Y)\right| \leqslant \sqrt{\mathbb{V}[X]\,\mathbb{V}[Y]}.$$
3. Montrer que, si X et Y suivent chacune une loi de Bernoulli,
$$\left|\mathrm{Cov}(X, Y)\right| \leqslant \frac{1}{4}.$$

QCOP VAF.5

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.

1. Donner la définition de « X et Y sont corrélées » et de « X et Y sont décorrélées ».
2. Exprimer la covariance de X et de Y, notée $\mathrm{Cov}(X, Y)$ en fonction de $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{E}[XY]$.
3. Compléter et démontrer :
$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0 \quad \ldots \quad X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}$$
4. Justifier que l'implication réciproque est fausse.

Inégalités probabilistes

QCOP VAF.6 ★

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov.
2. Soit X une variable aléatoire réelle.
Soit $t > 0$. Soit $a > 0$.
   a) Montrer que :
   $$(X \geqslant a) = \left(e^{tX} \geqslant e^{ta}\right).$$
   b) En déduire que :
   $$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{ta}}.$$

QCOP VAF.7 ★

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
2. Soit X une variable aléatoire réelle d'espérance μ et de variance σ^2. Soit $\alpha > 0$.
   a) Montrer que :
   $$\mathbb{P}\left(|X - \mu| \geqslant \alpha\sigma\right) \leqslant \frac{1}{\alpha^2}.$$
   b) En déduire que :
   $$\mathbb{P}\left(\mu - \alpha\sigma < X < \mu + \alpha\sigma\right) \geqslant 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$