QCOP • SUP • Indications et éléments de réponse

AL. Applications linéaires

QCOP AL.1

1. Résultat. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall x, y \in E, \quad u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$.
2. Les égalités « $u^2(x) = u(x)^2$ » et « $u(xy) = u(x)u(y)$ » n'ont aucun sens car un espace vectoriel n'a pas de loi de multiplication interne.
3. Résultat. Une application linéaire constante est nulle.
   Utiliser que $u(0_E) = 0_F$.

QCOP AL.2

1. Résultat. u est injective $\quad \iff \quad \mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$.
2. **a)** Écrire $\mathscr{F} = (e_1, \dots, e_n)$, de sorte que $u[\mathscr{F}] = \big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$.

   En se donnant $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(e_i) = 0_F$, utiliser la linéarité de u pour montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \mathrm{Ker}(f)$, puis conclure en utilisant la liberté de $\mathscr{F}$.

   b) Résultat. Soit $\mathscr{F}$ une famille libre de E. Si $u[\mathscr{F}]$ n'est pas libre, alors u n'est pas injective.
3. Contre-exemple économique : $u = 0_{\mathrm{L}(E)}$.

   Autre contre-exemple : $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \right.$ et $\mathscr{F} = \big\{(1, 0), (0, 1)\big\}$.

QCOP AL.3

1. Les ensembles $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels de E (exercice : le démontrer).
2. Résultat. $\mathrm{Ker}(u^k) \subset \mathrm{Ker}(u^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(u^k) \supset \mathrm{Im}(u^{k+1})$.
   Résultat. $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) \subset \mathrm{Ker}(u + v)$ et $\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) \supset \mathrm{Im}(u + v)$.

QCOP AL.4

1. Résultat. $\lambda x = 0_E \quad \iff \quad [\lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } x = 0_E]$.
2. **a)** Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $u^k \in \mathrm{L}(E)$ (puissance d'un endomorphisme). Comme combinaison linéaire de puissances d'un endomorphisme, $P(u) \in \mathrm{L}(E)$.

   b) Procéder par récurrence.

   c) Évaluer l'endomorphisme $P(u)$ en x et utiliser la question précédente.

   d) Utiliser la question précédente et la première question.

QCOP AL.5

1. Résultat. $\mathrm{p} : \left| \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & x_F. \end{array} \right.$

2. Utiliser la définition.

3. ♦ Pour montrer que $E = \mathrm{Ker}(\mathrm{p}) \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{p})$, raisonner par analyse synthèse, en utilisant la question précédente.

♦ Montrer que $E = \mathrm{Ker}(\mathrm{p}) \cap \mathrm{Im}(\mathrm{p}) = \{0_E\}$.

4. **a)** L'endomorphisme $-\mathrm{p}$ vérifie-t-il « $f \circ f = f$ » ?

QCOP AL.6

1. Résultat. $\mathrm{s} : \left| \begin{array}{ccc} E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & x_F - x_G. \end{array} \right.$

2. Utiliser la définition.

3. ♦ Pour montrer que $E = \mathrm{Ker}(\mathrm{s} - \mathrm{Id}_E) + \mathrm{Ker}(\mathrm{s} + \mathrm{Id}_E)$, raisonner par analyse synthèse, en utilisant la question précédente.

♦ Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{s} - \mathrm{Id}_E) \cap \mathrm{Ker}(\mathrm{s} + \mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$.

4. **a)** L'endomorphisme nul vérifie-t-il « $f \circ f = \mathrm{Id}_E$ » ?

QCOP AL.7

4. Pour chaque sous-ensemble proposé, il s'agit de l'écrire comme l'intersection de noyaux de formes linéaires non nulles (*i.e.* de les écrire comme intersection d'hyperplans).

QCOP AL.8

1. Comme φ est non nulle, on peut fixer $x_0 \in E$ tel que $\varphi(x_0) \neq 0$. Pour $y \in \mathbb{R}$, en posant $x := y\dfrac{x_0}{\varphi(x_0)}$, on a $\varphi(x) = y$.

2. **b)** Il s'agit de montrer que toute forme linéaire de $\mathbb{K}^n$ est une application de la forme :

$$\varphi : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto a_1x_1 + \cdots + a_nx_n.$$

Pour montrer cela, on peut raisonner par analyse-synthèse, en appliquant φ aux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^n$: $(1, 0, \dots, 0)$, ..., $(0, \dots, 0, 1)$.

3. **a)** ♦ Montrer que $H \cap \mathrm{Vect}\,\{x_0\} = \{0_E\}$ se fait sans difficulté.

♦ Pour montrer que $E = H + \mathrm{Vect}\,\{x_0\}$, on peut raisonner par analyse-synthèse. Dans la phase d'analyse, on se donne, pour $x \in E$, $x_H \in H$ et $x_D = \lambda x_0 \in E \setminus H$ tels que $x = x_H + \lambda x_0$. On peut d'abord déterminer λ, donc x_D, puis on peut en déduire x_H.

b) Résultat. Oui, la réciproque est vraie.

4. La difficulté repose dans la démonstration de $\boxed{\Rightarrow}$. Tout vecteur $x_0 \in E \setminus \mathrm{Ker}(\varphi)$ peut définir un tel λ : par exemple, $\lambda = \dfrac{\varphi(x_0)}{\psi(x_0)}$. On peut ensuite vérifier la propriété en utilisant la question précédente, avec $H = \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\psi)$.