ARIPOL. Arithmétique des polynômes

QCOP ARIPOL.1

1. Calculer $(\mathrm{X}-\alpha_1)(\mathrm{X}-\alpha_2)(\mathrm{X}-\alpha_3)$ et procéder par identification.
2. Reconnaître les termes donnés par les relations coefficients racines.
   Pour la deuxième somme, on pourra additionner les trois fractions ou multiplier la somme par le produit $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$.
   Résultat. $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=0$ et et $\dfrac{1}{\alpha_1}+\dfrac{1}{\alpha_2}+\dfrac{1}{\alpha_3}=-1$.

QCOP ARIPOL.2

3. On note $P=a\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+c$. Puisque P admet 1 pour racine, ou bien 1 est racine double, ou bien P admet une seconde racine r. D'après les relations coefficients racines, on a
$$1\times r=\frac{c}{a}\quad\text{donc}\quad r=\frac{c}{a}.$$

QCOP ARIPOL.4

2. Écrire les relations de Bézout et les multiplier.
3. ♦ Pour la première, raisonner par récurrence sur k.
   ♦ Pour la deuxième, fixer k et utiliser la première avec changement de notation, ou raisonner de nouveau par récurrence.
4. Pour montrer que $\mathrm{X}-a\wedge\mathrm{X}-b=1$, faire la différence des deux pour trouver une relation de Bézout. On en déduit le résultat par récurrence.

QCOP ARIPOL.5

4. On peut prendre $P:=(\mathrm{X}^2+1)(\mathrm{X}^2+4)$.

QCOP ARIPOL.6

1. a) Le complexe $\overline{a}$ est également racine de P. Écrire P sous forme développée.
   b) On a $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-\overline{a})=\mathrm{X}^2-2\mathfrak{Re}(a)\mathrm{X}+|a|^2$. Utiliser ensuite successivement (d'abord pour $\mathrm{X}-a$ puis $\mathrm{X}-\overline{a}$ le résultat
$$\text{« }\alpha\text{ est racine de }P\quad\Longleftrightarrow\quad\exists Q\in\mathbb{C}[\mathrm{X}]:P=(\mathrm{X}-\alpha)Q\text{ ».}$$
   Pour montrer que le polynôme obtenu est réel, utiliser la conjugaison.
2. La question précédente nous donne les irréductibles de degré 2 intervenant dans cette décomposition.