# CPLX. Nombres complexes

## QCOP CPLX.1

**3.** Résultat. $\left\{(a,b)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; e^{ia}+e^{ib}\in\mathbb{R}\right\} = \left\{(a,b)\in\mathbb{R} \;\middle|\; \begin{cases} a-b\equiv\pi \;\;[2\pi] \\ a+b\equiv 0 \;\;[2\pi] \end{cases}\right\}.$

Il y a deux conditions car :

- ♦ il faut traiter le cas où $\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)=0$ ;
- ♦ ensuite, lorsque $\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\neq 0$, on étudie les cas où $e^{i\frac{a+b}{2}}=e^{-i\frac{a+b}{2}}$.

## QCOP CPLX.2

**3.** Utiliser l'inégalité triangulaire (question précédente) avec $z=(z-z')+z'$ et $z'=(z'-z)+z$.

## QCOP CPLX.3

**2.** Résultat. $|z+z'|=|z|+|z'| \quad\Longleftrightarrow\quad \exists\lambda\geqslant 0 : z'=\lambda\cdot z.$

**3.** On note $a$ l'affixe de A, $b$ l'affixe de B et $c$ l'affixe de C.
Il s'agit alors de montrer que
$$|b-a|+|c-b|=|c-a| \quad\Longleftrightarrow\quad \exists\lambda\geqslant 0 :\; b-a=\lambda(c-b).$$
En effet, dire que A, B et C sont alignés dans le même sens revient à dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont positivement colinéaires (colinéaires et de coefficient de colinéarité positif).

## QCOP CPLX.4

**1.** Résultat. $e^z=e^{\mathfrak{Re}(z)}\Big(\cos\big(\mathfrak{Im}(z)\big)+i\sin\big(\mathfrak{Im}(z)\big)\Big).$

**2.** Résultat. $|e^z|=e^{\mathfrak{Re}(z)}$ et $\arg(z)\equiv\mathfrak{Im}(z)\;\;[2\pi]$

**3.** Résultat. $|e^z|=1 \quad\Longleftrightarrow\quad z\in i\mathbb{R}.$

**4.** Utiliser la première question.

## QCOP CPLX.5

**1.** Résultat. $Z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

**2.** Résultat. $\left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{e}^z = Z\right\} = \left\{\ln(R) + \mathrm{i}(\theta + 2k\pi) \;;\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

On peut raisonner par analyse-synthèse.

- Analyse.
  Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{e}^z = Z$.
  Notons $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $z = a + \mathrm{i}b$, de sorte que $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$.
  Alors on a les équivalences suivantes :
  $$\mathrm{e}^z = Z \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} \mathrm{e}^a = R \\ b \equiv \theta \;[2\pi] \end{cases}$$
  ... (poursuivre et compléter la rédaction).
- Synthèse. ...

**3.** Résultat. $\{z \in \mathbb{C} \;|\; \mathrm{e}^z = 1 + \mathrm{i}\} = \left\{\dfrac{\ln(2)}{2} + \mathrm{i}\left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \;;\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

## QCOP CPLX.6

**3.** Résultat. $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$ et $\displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = (-1)^{n-1}$.

## QCOP CPLX.7

**1.** Résultat. $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \;|\; z^n = 1\} = \left\{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} \;;\; k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.

**2.** Résultat. $A = \left\{R^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{n}(\theta + 2k\pi)} \;;\; k \in [\![0, n-1]\!]\right\}$.

On utilise que le nombre $\dfrac{z}{R^{\frac{1}{n}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{n}}}$ est une racine $n$-ième de l'unité (un élément de $\mathbb{U}_n$).

**3.** Résultat. $\displaystyle\sum_{\omega \in A} \omega = 0$ et $\displaystyle\prod_{\omega \in A} \omega = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(-1)^{n-1}$.

## QCOP CPLX.8

**2.** Résultat. $z^2 = a \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{cases} x^2 - y^2 = \mathfrak{Re}(a) \\ x^2 + y^2 = |a| \\ \mathrm{signe}(xy) = \mathrm{signe}\big(\mathfrak{Im}(a)\big). \end{cases}$

## QCOP CPLX.9

**2.** Résultat. Les nombres $z_1$ et $z_2$ sont solutions de l'équation polynomiale $z^2 - d_1 z + d_2$.

On utilise les relations entre coefficients et racines d'un polynôme de degré 2.