QCOP • SUP • Indications et éléments de réponse

DER. Dérivabilité

QCOP DER.1

1. On peut utiliser un taux d'accroissement.

2. **a)** Résultat. f' est impaire.

b) Résultat. f' est paire.

3. Résultat. f' est T-périodique.

QCOP DER.2

3. On peut prendre :

a) $f : x \longmapsto x^3$, $I = \mathbb{R}$, $c = 0$;

b) $f : x \longmapsto |x|$, $I = \mathbb{R}$, $c = 0$;

c) $f : x \longmapsto x$, $I = [0, 1]$, $c = 0$.

QCOP DER.3

1. Résultat. $f'(c) = 0$.

2. Utiliser le lemme de l'extremum local (question précédente).

3. On peut considérer $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

QCOP DER.4

2. Appliquer le théorème de Rolle à la fonction

$$g : x \longmapsto f(x) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)\right]$$

(distance entre la courbe de f et la droite reliant $f(a)$ et $f(b)$).

3. Se donner $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(y)$. En supposant $x \neq y$, appliquer le théorème des accroissements finis sur $[x, y]$ (ou $[y, x]$).

QCOP DER.5

1. On utilise la fonction taux d'accroissement, définie sur $I \setminus \{a\}$: $x \longmapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

2. Utiliser la question précédente pour la démonstration.

QCOP DER.6

2. **a)** Un sens se fait sans difficulté, l'autre avec le théorème des accroissements finis.
   b) Appliquer la question précédente à $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$.
3. Prendre une fonction constante par morceaux sur deux intervalles disjoints.

QCOP DER.7

2. Utiliser le théorème des accroissements finis.
3. ♦ Pour les deux premières, utiliser l'inégalité des accroissements finis.
   ♦ Pour la dernière, utiliser le théorème des accroissements finis sur $[x, x+1]$ pour $x > 0$.

QCOP DER.8

3. On peut prendre la valeur absolue.
4. On peut prendre $f : x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$

QCOP DER.9

2. **a)** Résultat. f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
   Utiliser le théorème des accroissements finis sur $[a, a+h]$ et faire tendre h vers 0, pour montrer que $h \longmapsto \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie en 0.
   b) Résultat. f n'est pas dérivable en a.
3. On applique le théorème de la limite de la dérivée (question précédente).
   Il s'agit de montrer que $-\dfrac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}$ admet une limite finie en 0, ce qui peut se faire à l'aide d'un équivalent par exemple.