QCOP • SUP • Indications et éléments de réponse

DIM. Dimension finie

QCOP DIM.1

3. Écrire la formule du rang pour f et f^2, et utiliser les inclusions classiques (à savoir montrer) :

$$\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f) \supset \mathrm{Im}(f^2).$$

QCOP DIM.3

2. On peut prendre f un projecteur.

3. L'application $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, 0) \end{array} \right.$ convient.

QCOP DIM.4

1. Résultat.

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{F} \text{ est libre} & \Longrightarrow & |\mathcal{F}| \leqslant n\,; \\ \mathcal{F} \text{ est génératrice} & \Longrightarrow & |\mathcal{F}| \geqslant n\,; \\ \mathcal{F} \text{ est une base} & \Longrightarrow & |\mathcal{F}| = n. \end{array}$$

2. Donner des contre exemples, en se plaçant dans des espaces simples ($\mathbb{R}^3$ par exemple).

3. On rappelle que $\dim\big(\mathrm{L}(E)\big) = n^2$. On contrapose la première implication de la première question pour conclure.

QCOP DIM.5

1. Résultat. $n = \dim\big(\mathrm{Ker}(\varphi)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(\varphi)\big)$.

2. Utiliser que $\dim\big(\mathrm{Ker}(\varphi)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(\varphi)\big) = 2$. Comme φ est non nulle, $\dim\big(\mathrm{Ker}(\varphi)\big) \leqslant 1$, donc $\dim\big(\mathrm{Im}(\varphi)\big) \geqslant 1$. On conclut en remarquant que $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{R}$.

3. Ces sous-ensembles sont des hyperplans d'espaces à préciser. On peut donc en déduire leur dimension, connaissant la dimension l'espace vectoriel ambiant.

QCOP DIM.6

4.
- ♦ Le premier espace est un hyperplan de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
- ♦ Le deuxième espace est en fait égal à $\{0_n\}$. Le démontrer est un bon exercice.

QCOP DIM.7

1. Résultat. u est bijective.
2. a) Montrer que $\varphi_{|\mathbb{K}_n[X]}$ est injective en étudiant son noyau, puis conclure par un argument de dimension (question précédente).

   b) Lorsque l'on considère un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on peut se ramener à $\mathbb{K}_n[X]$ avec $n = \deg(P)$. On utile la bijectivité de $\varphi_{|\mathbb{K}_n[X]}$ pour conclure.