QCOP • SUP • Indications et éléments de réponse

DL. Développements limités

QCOP DL.1

2. Comprendre que $\dfrac{1}{4+x^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}$ et utiliser la première question.

3. **b)** Faire le quotient des développements limités et utiliser le développement de l'inverse (première question).

QCOP DL.2

2. On calcule les dérivées successives en 0 de la fonction $x \longmapsto \exp(zx)$.

QCOP DL.3

1. **a)** Calculer les premières dérivées et raisonner par récurrence.
Résultat. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad {f_\alpha}^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots\big(\alpha-(n-1)\big)\,(1+x)^{\alpha-n}$.

b) Résultat. $f_\alpha(x) = 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots\big(\alpha-(k-1)\big)}{k!}x^k + \underset{x\to0}{o}(x^n)$.

2. Résultat. $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + \underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)$.

QCOP DL.4

1. Utiliser la définition de $o(\cdot)$ avec des ε et l'inégalité triangulaire intégrale, en écrivant que :

$$\forall t \in I, \quad F(t) = \int_0^t f(\theta)\,\mathrm{d}\theta \ \text{ et } \ G(t) = \int_0^t g(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

2. Résultat.
$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k + \underset{x\to0}{o}\left(x^{2n+1}\right)$$
$$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1} + \underset{x\to0}{o}\left(x^{2n+1}\right).$$

On « primitive » les développements limités de $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$.

QCOP DL.5

2. Résultat. $\displaystyle\lim_{h\to0} \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2} = f''(a)$
La formule de Taylor-Young à l'ordre 2 permet de développer $f(a+h)$ et $f(a-h)$.