QCOP • SUP • Indications et éléments de réponse

GRP. Groupes

QCOP GRP.1

1. Résultat. $\forall x, y \in G_1, \quad f(x *_1 y) = f(x) *_2 f(y)$.

2. **a)** On rappelle que $e_1 *_1 e_1 = e_1$ et $f(e_1)$ est inversible dans G_2.

b) Utiliser que, pour $x \in G_1$, $x *_1 x^{-1} = e_1$.

c) Procéder par récurrence pour les entiers positifs, exploiter la question précédente pour les négatifs.

QCOP GRP.2

3. Remarquer que $H = f^{\langle -1 \rangle}[\mathbb{Z}]$ où $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ k & \longmapsto & (k, 0) \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}^2, +)$.

QCOP GRP.3

3. On peut écrire $\{-1, 1\}$ comme l'image directe de $\mathbb{R}^*$ par l'application

$$\text{signe} : \mathbb{R}^* \longmapsto \{-1, 1\} x \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$$

On vérifie que cette application définit bien un morphisme de groupes.

QCOP GRP.4

3. **a)**
- ♦ L'implication $\boxed{\Leftarrow}$ se traite sans difficulté, connaissant la définition de morphisme de groupes.
- ♦ Pour $\boxed{\Rightarrow}$, on peut raisonner par récurrence pour montrer la propriété sur $\mathbb{N}$ et raisonner avec $-n \geqslant 0$ pour $n \leqslant 0$.

b) Soit f un morphisme de groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}, +)$. On peut fixer $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad f(n) = n\alpha.$$

Raisonner ensuite avec la caractérisation de l'injectivité par le noyau.

Résultat. Tous les morphismes sauf le morphisme nul.