

INTS. Intégration sur un segment

QCOP INTS.1

- Utiliser que $-|f(t)| \leq f(t) \leq |f(t)|$ et la croissance de l'intégrale, puis la linéarité.
- Le théorème des bornes atteintes assure que $\sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$ existe.

QCOP INTS.2

- En écrivant $\int_a^b f(t) dt = Re^{i\alpha}$ avec $R \in \mathbb{R}_+$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on cherche θ tel que $\theta + \alpha \equiv 0 [2\pi]$.
 - Utiliser que $e^{i\theta} \int_a^b f(t) dt = \int_a^b e^{i\theta} f(t) dt = \left| e^{i\theta} \int_a^b f(t) dt \right| = \left| \int_a^b f(t) dt \right|$.
- Utiliser l'inégalité triangulaire intégrale complexe (question précédente).

QCOP INTS.3

- Résultat. F_{x_0} est continue.
- Il s'agit de montrer que $\frac{F_{x_0}(a+h) - F_{x_0}(a)}{h} - f(a) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.
- On fixe $x_0 \in I$ et on montre que $F_{x_0}' = 0$.

QCOP INTS.4

- On considère $F : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$, de sorte que $F' = f$.

QCOP INTS.5

- Résultat. $\left. \begin{array}{l} f \text{ est } \mathbf{continu} \text{ sur } [a, b] \\ f \text{ est de signe } \mathbf{constant} \text{ sur } [a, b] \\ \int_a^b f(t) dt = 0 \end{array} \right\} \implies f = 0 \text{ sur } [a, b].$

On pourra étudier la monotonie de $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$.

- Par composition et régularité \mathcal{C}^1 de f , $t \mapsto |f(t)|$ est continue et positive sur $[a, b]$.

QCOP INTS.6

2. Appliquer la question précédente à $f = \sin(\cdot)$, $a = 0$ et $b = \pi$.

QCOP INTS.7

2. On a $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$ et on applique le théorème des sommes de Riemann à

$f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sur $[0, 1]$.

3. Résultat. $\frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1}}{n^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \frac{3}{2}$.

On applique le théorème des sommes de Riemann à $f : t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0, 1]$.